НАШ КОНКУРС, VI тур («Квантик» № 2, 2022)

26. *Мудрецам A и B выдали по натуральному числу и сказали, что эти числа различаются на 1. «Я не знаю, знаешь ли ты моё число», – сказал A, обращаясь к B. Какое число у A?*

Ответ: 2. Каждое натуральное число, кроме 1, имеет ровно двух соседей (отличающихся от него на 1). Если у A число 2, то у B либо 1 (и тогда B знает число A), либо 3 (и тогда B не может знать число A), условие задачи выполнено. Если же у A не 2, то число у B заведомо имеет двух соседей, и A может наверняка утверждать, что B не знает наверняка, какое из них у A.

27. *Разрежьте кольцо с дырочкой (рис. 1) на четыре равные части и из полученных частей сложите снежинку (рис. 2).*

Ответ: см. красные линии на рисунках

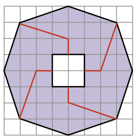


Рис. 1

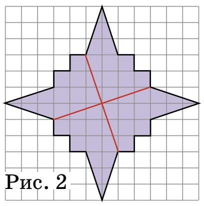


Рис. 2

28. *В IV туре нашего конкурса требовалось расшифровать ребус $ТУК \times 5 = СТУК$, он имеет два решения. а) Замените пятёрку другой цифрой так, чтобы получился ребус, имеющий решение. б) Докажите, что такая цифра ровно одна. в) Докажите, что решение у нового ребуса единственное. (Как обычно, одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, разные буквы – разные цифры, и ни одно число не начинается с нуля.)*

Ответ: $750 \times 9 = 6750$. Пусть Z – искомая цифра, $Z \neq 5$. Ясно, что $Z \neq 0$ и $Z \neq 1$. Поэтому Z может принимать значения 2, 3, 4, 6, 7, 8 или 9, а ребус выглядит так: $ТУК \times Z = СТУК$. Вычтем из обеих частей число $ТУК$. Получим:

$$ТУК \times (Z-1) = СТУК - ТУК = С000.$$

Значит, $ТУК \times (Z - 1)$ делится на 1000. При каждом конкретном возможном Z возникают определённые требования к делимости числа $ТУК$, сведём их в таблицу (справа).

Z	$Z-1$	$ТУК$ делится на
2	1	1000
3	2	500
4	3	1000
6	5	200
7	6	500
8	7	1000
9	8	125

Видим, что для всех Z, кроме 9, число $ТУК$ делится на 100, то есть оканчивается двумя нулями. Но это недопустимо – ведь цифры $У$ и $К$ различны. Значит, $Z = 9$.

Тогда мы знаем, что трёхзначное число $ТУК$ делится на 125, и все его цифры различны. Этим условиям удовлетворяют всего 6 чисел: 125, 250, 375, 625, 750 и 975. Далее проще всего не мучиться, а сделать прямую проверку:

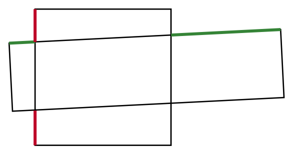
$$125 \times 9 = 1125, \qquad 625 \times 9 = 5625,$$
$$250 \times 9 = 2250, \qquad 750 \times 9 = 6750,$$
$$375 \times 9 = 3375, \qquad 975 \times 9 = 8775.$$

Так как у произведения – $СТУК$ – тоже все цифры различны, остаётся один вариант $СТУК = 6750$; тогда $ТУК = 750$, это и есть ответ.

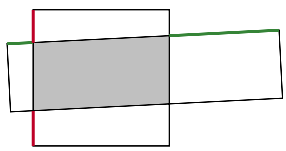
29. *Некоторые клетки белой прямоугольной таблицы закрасили синим. Во всех строках количество синих клеток различно, и во всех столбцах тоже. Докажите, что если в таблице не поровну строк и столбцов, то в ней поровну белых и синих клеток.*

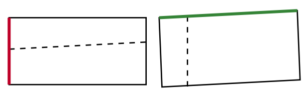
Пусть строк всего m, столбцов – n, и, скажем, $n > m$. В каждом столбце может быть от 0 до m белых клеток – всего $m + 1$ вариантов, поэтому $n \leqslant m + 1$. Но $n > m$, откуда $n = m + 1$. Тогда в столбцах встречаются по разу все варианты количеств белых клеток (от 0 до m), и соответственно все количества синих клеток (от m до 0), а значит, и тех и других поровну (по $1 + 2 + \ldots + m$).

30. *Квадрат 6×6 и прямоугольник 3×12 пересекаются, как показано на рисунке. Докажите, что сумма зелёных отрезков в два раза больше суммы красных отрезков.*



Вырежем общую часть квадрата и прямоугольника и сдвинем друг к другу оставшиеся обрезки каждой из фигур – получится два прямоугольника (см. рисунок).

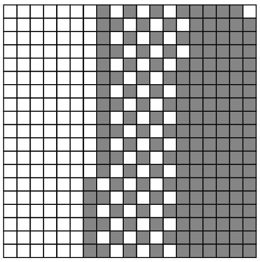




Прямоугольник, получившийся из квадрата 6×6, будет иметь длину 6 и ширину R, равную сумме красных отрезков, а прямоугольник, получившийся из прямоугольника 3×12, будет иметь ширину 3 и длину G, равную сумме зелёных отрезков. Но площади исходных фигур одинаковы ($6 \cdot 6 = 3 \cdot 12 = 36$), и вырезана одна и та же площадь, поэтому сложенные из остатков прямоугольники тоже равны по площади. Тогда $6 \cdot R = 3 \cdot G$ и $G = 2 \cdot R$, что и требовалось.

РАСКРАСКА КВАДРАТА $N \times N$

(«Квантик» № 3, 2022)



На рисунке приведено решение для $N = 19$. Кратко изложим идею, как раскрасить квадрат для любого $N \neq 3k - 1$. Заметим, что при таком N число пар соседних клеток делится на 3.

Добьёмся того, чтобы число пар белых соседних клеток равнялось трети от общего числа пар. Делаем это так: начинаем красить белым сначала клетки первого столбца сверху вниз, потом второго, третьего и т. д. Раскрашивая очередную клетку, мы увеличиваем число пар соседних белых клеток на 1 либо на 2. Поэтому мы можем остановиться, когда число пар будет каким нужно или на 1 меньше (в последнем случае легко докрасить ещё одну белую клетку так, чтобы добавилась ещё одна пара).

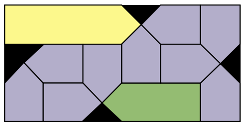
Будет покрашена примерно треть клеток. Остальные клетки покрасим временно в чёрный цвет. Далее будем перекрашивать в белый цвет некоторые клетки правой половины, пытаясь довести число пар чёрно-белых соседей до трети от общего числа пар. Перекраску будем делать «в шахматном порядке», чтобы не менять число пар белых соседей. Если добьёмся желаемого, то победа: число пар чёрных соседей автоматически составит треть от общего количества пар.

Когда мы перекрашиваем клетку в белый, у нас добавляется 4 пары чёрно-белых соседей, если эта клетка внутри, 3 пары – если она на границе, и 2 пары – если в углу. Чтобы всё сошлось, сделаем перед началом перекрашивания хитрость: выберем угловую чёрную клетку *У*, соседнюю с ней по диагонали клетку *В* (внутреннюю) и клетку *Г* через одну от угловой на границе – пусть они будут в той «шахматной» половине, которую мы перекрашиваем, но их самих пока трогать не будем. Далее перекрашиваем, как описано выше, пока число чёрно-белых пар не составит почти треть от общего числа пар: остановимся, когда останется добавить 6, 5, 4 или 3 пары.

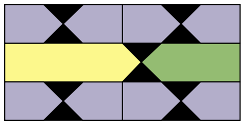
Если не хватает трёх пар, перекрасим ещё клетку *Г*, если четырёх – клетку *В*, если пяти – клетки *У* и *Г*, если шести – клетки *У* и *В*.

КАРАНДАШИКИ В КОРОБОЧКЕ

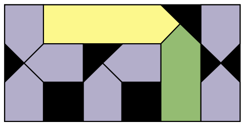
(«Квантик» № 3, 2022)



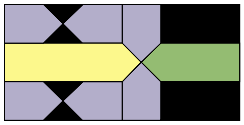
1Б + 1С + 9М



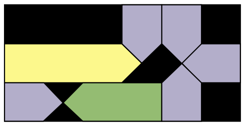
1Б + 1С + 8М



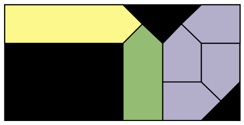
1Б + 1С + 7М



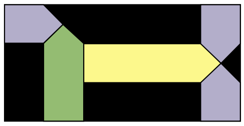
1Б + 1С + 6М



1Б + 1С + 5М



1Б + 1С + 4М



1Б + 1С + 3М

Можно ли разместить в режиме «антислайд» набор 1Б + 1С + 2М, нам не известно.

ПОХИЩЕНИЕ В АДВОКАТСКОЙ КОНТОРЕ

(«Квантик» № 3, 2022)

Адвокат не мог заводить часы, которые показывают в этот момент 16:37 или близкое к этому время: примерно с 16:20 до 16:50 левое отверстие для ключа перекрыто часовой стрелкой. А в 16:37 перекрыты оба отверстия. Фото подобных часов приведено справа.

КТО ВИДИТ КАРТИНУ ПРАВИЛЬНО

(«Квантик» № 3, 2022)

Если бы художник смотрел на берег сверху, в озере отражалось бы только небо, и никакой загадки не было бы. Художнику пришлось стоять низко, близко к поверхности воды, чтобы «заглянуть под свой берег» и увидеть там отражения далёких деревьев. Но всё же он стоял *над* водой, и далёкий берег хоть немного, да скрывал свой задний план в отражении. Так как на правой половине картины мы видим больше заднего плана, чем на левой, то отражение – слева, и правильно смотрит Квантик.

Ещё один аргумент: можно заметить, что линия берега левее середины (оси симметрии заднего плана). Если бы художник был в точности в плоскости симметрии (то есть на поверхности воды), линия берега была бы в точности посередине. Чтобы она сдвинулась относительно фона влево, художнику надо сдвинуться вправо. Ну и раз рисовал он не из-под воды, то справа настоящий лес, а слева – отражение.

ГЕОГРАФИЯ ПО-КИТАЙСКИ

Подсказка: как на китайском языке записывается Тянь-Шань? Подробное решение читайте в следующем номере.

КАК БУСЕНЬКА СБРАСЫВАЛА ПАРОЛЬ

Когда мы записываем какое-либо число в десятичной записи, мы на самом деле представляем его в виде суммы чисел, кратных степеням числа 10, например

$$512 = 5\cdot10^2 + 1\cdot10^1 + 2\cdot10^0.$$

При этом для записи чисел мы используем цифры – «маленькие числа» от 0 до 9, которые обозначаются одним символом.

В системе счисления с другим основанием та же самая запись будет обозначать другое число, например, запись «512» в 16-ричной системе счисления будет обозначать число

$$5\cdot16^2 + 1\cdot16^1 + 2\cdot16^0.$$

Для записи произвольных чисел в 16-ричной системе нам понадобится больше цифр, чем в десятичной, – кроме обычных, от 0 до 9, нужны ещё цифры «десять», «одиннадцать», «двенадцать», «тринадцать», «четырнадцать», «пятнадцать». В информатике, где часто пользуются 16-ричной системой, эти цифры обозначают A, B, C, D, E, F.

Но что делать, если мы хотим записывать числа в системе счисления с совсем большим основанием? Например, с основанием 38, как в сказке, – в этой системе счисления в качестве цифр используются числа от 0 до 37. В пульте коллеги Спрудля эту проблему решили так: чтобы не путаться с незнакомыми символами, цифры в экзотических системах счисления записывают привычным нам способом (десятичным), но при этом обводят в кружок.

Восстановление пароля Бусенька провела следующим образом. После включения пульта на экране загорелось число 1. При нажатии кнопки Pass пульт вычислил значение $f(1)$ секретного многочлена в точке 1, то есть число

$$a_1\cdot1^9 + a_2\cdot1^8 + \ldots + a_9\cdot1 + a_{10} = a_1 + a_2 + \ldots + a_9 + a_{10}.$$

Так как все коэффициенты a_i положительны, это число больше каждого из них. Нажатие кнопки Num побуждает пульт сделать это число основанием экзотической системы счисления. Цифрами в такой системе счисления будут числа от 0 до $f(1)-1$, в частности каждое число a_i может использоваться в качестве цифры a_i. На экране пульта после нажатия кнопки Num появилось число 10 – это то же самое число $f(1)$, которое было перед нажатием, только теперь оно записано в системе счисления по основанию $f(1)$. Так и должно быть: когда вы пользуетесь какой-нибудь системой счисления, её основание всегда записывается как 10.

Что же произойдёт, если теперь нажать кнопку Pass? Пульт вычислит значение секретного многочлена $f(x)$, подставив вместо x число на экране, то есть пульт вычислит $f(f(1))$, причём результат должен быть записан в системе счисления по основанию $f(1)$. Таким образом, пульт вычислит значение

$$f(f(1)) = a_1\cdot f(1)^9 + a_2\cdot f(1)^8 + \ldots + a_9\cdot f(1) + a_{10}$$

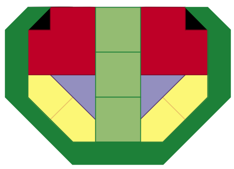
и, чтобы показать его в системе счисления по основанию $f(1)$, пульт… просто предъявит нам запись $a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5\, a_6\, a_7\, a_8\, a_9\, a_{10}$.

И напоследок – задача Сергея Маркелова из XXXI Турнира городов.

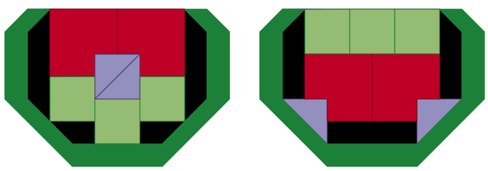
Барон Мюнхгаузен попросил задумать непостоянный многочлен $P(x)$ с целыми неотрицательными коэффициентами и сообщить ему только значения $P(2)$ и $P(P(2))$. Барон утверждает, что лишь по этим данным всегда может восстановить задуманный многочлен. Не ошибается ли барон?

ГОРШОЧЕК ЕВКЛИДА

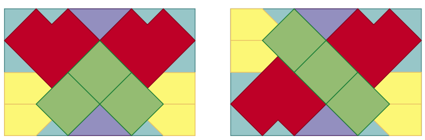
1. Все 11 элементов в горшочке:



2. Семь элементов размещены симметрично в режиме антислайд (напомним, что горшок накрыт невидимой крышкой):



3. Все 11 элементов размещены в прямоугольном лотке.

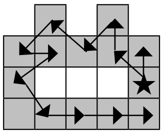


СМАРТ КЕНГУРУ 2021.

Избранные задачи

1. Конструкция, которую собрал Смартик, состоит из 8 планок и имеет 4 «хвостика», поэтому ответы А (7 планок) и Б (5 «хвостиков») отбрасываем. Ответ В тоже не подходит – там все «хвостики» состоят из одной планки, а в условии один «хвостик» состоит из двух планок. Рисунок Д тоже не годится – на нём есть «хвостик» из трёх планок. А вот рисунок Г можно превратить поворотами в рисунок из условия. **Ответ:** Г.

2. На рисунке показано, как Федя может побывать во всех клетках, кроме левого нижнего угла. А в этот угол он попасть никогда не сможет, так как нет ни одной клетки, которая была бы ниже, левее или по диагонали от неё. **Ответ:** Д.



3. Покажем, что все 4 картинки могут получиться. Начнём с ответа А: положим сначала карточку в левый нижний угол (тогда в левой нижней клетке окажется число 4), поверх неё положим карточку в правый нижний угол (в средней клетке нижнего ряда окажется 4, а в правой клетке – 3). Потом положим карточку в правый верхний угол и, наконец – в левый верхний.

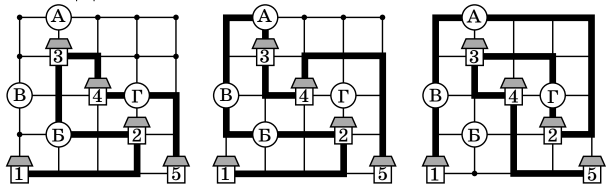
Чтобы получить картинку Б надо начать с левого верхнего угла, затем положить карточку в правый верхний, затем – в правый нижний, и потом – в левый нижний.

Картинка В получается, если начать с левого верхнего угла и правого нижнего (в любом порядке), потом положить карточку в левый нижний угол и в конце – в правый верхний.

Картинку Г получим, начав с левого нижнего угла, потом перейдём к левому верхнему, потом к правому верхнему и в конце положим карточку в правый нижний угол. **Ответ:** Д.

4. Позавчера – это два дня назад, а послезавтра – это два дня вперёд. Между этими днями располагается три дня (вчера, сегодня и завтра). Если среди них есть тот же день недели, что и позавчера, то в неделе окажется всего один или два дня, и оба эти варианта возможны. Если же все эти три дня – разные дни недели, то первое повторение в нашей цепочке дней будет только послезавтра. Тогда позавчера, вчера, сегодня и завтра – это полная неделя, а послезавтра начнётся следующая неделя. Тем самым, из предложенных в условии вариантов ответа подходит только Б.

5. Приведённые на рисунках примеры маршрутов показывают, что почтальон может не посетить любой из отмеченных перекрёстков. **Ответ:** Д.



6. Пусть $X = \text{НОК}(a, b) = \text{НОК}(2a, 3b)$. Тогда X делится и на b, и на $3b$, следовательно, в разложение X на простые множители 3 входит в бóльшей степени, чем в разложение b. Это возможно только в том случае, когда на эту бóльшую степень 3 делится a. Тем самым, обязательно выполняется условие Д.

С другой стороны, для $a = 3$, $b = 2$ условие задачи верно, но ни одно из условий А – Г не выполняется. **Ответ:** Д.

7. Горизонтальные основания верхнего и нижнего треугольников равны 2, а сумма их высот h_1 и h_2 равна $4 - 1 = 3$. Поэтому сумма площадей верхнего и нижнего треугольников равна $\frac{1}{2} \cdot 2h_1 + \frac{1}{2} \cdot 2h_2 = h_1 + h_2 = 3$. Аналогично находим сумму площадей правого и левого треугольников (с вертикальными основаниями, равными 1, и суммой высот $7 - 2 = 5$): она равна $\frac{1}{2} \cdot 5 = 2{,}5$. Тогда сумма площадей всех четырёх треугольников равна 5,5. **Ответ:** Б.

8. Заметим, что шурин бывает только у мужчин, а деверь – только у женщин. Кроме того, сами деверь и шурин – мужчины. Поэтому у шурина и деверя не может быть деверя, и оттого деверь шурина, деверь деверя и шурин деверя деверя – это вообще бессмысленные словосочетания. Поскольку шурин бывает только у мужчин, то и шурин шурина может быть только у мужчины, а никак не у госпожи Y. Зато у госпожи Y может быть деверь, у которого есть шурин. Им и может оказаться господин X. Итак, годится только вариант «шурин деверя». **Ответ:** В.

9. Обозначим скорости поедания плюшек Фрекен Бок, Карлсоном и Малышом через b, k и m соответственно. По условию, $k + b = 5m$, $m + b = 3k$. Сложим эти два равенства: $k + m + 2b = 5m + 3k$, то есть $2b = 4m + 2k$. Отсюда получаем: $2m + k = b$. Это означает, что если Малыш «ускорится» в 2 раза, то вместе с Карлсоном он будет есть с такой же скоростью, что и Фрекен Бок. **Ответ:** Б.