Математический кружок

Игорь Акулич

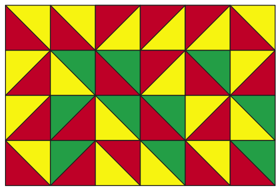
ЕГО ПРОЩАЛЬНЫЙ ПОКЛОН

Такое название Конан Дойл дал одному из последних рассказов о легендарном сыщике Шерлоке Холмсе. Здесь же речь пойдёт не о вымышленном персонаже, а о реальном человеке, великолепном математике и педагоге, покинувшем нас в 2019 году, – Вячеславе Викторовиче Произволове.

За несколько лет до его кончины я встречался с ним в Москве. Он тогда проживал в районе Митино и сразу же повёл меня прогуляться в расположенный рядом парк с одноимённым названием, рассказывая о встреченных им здесь представителях тамошней фауны – ежах, ужах и т.д. Но не только живностью оказалось примечательно сие место – всегда можно было подобрать какую-нибудь веточку и найти клочок земли, чтобы представить на обозрение ту или иную красивую задачу, коих Вячеслав Викторович создал, должно быть, неисчислимое количество[1].

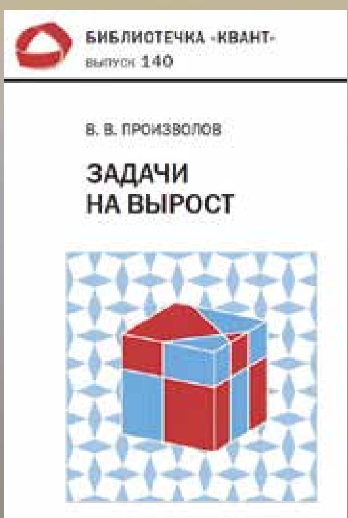
Одна из них была придумана довольно давно:

Из одинаковых квадратов составлен прямоугольник[2]. Затем каждый квадрат произвольным образом разрезается диагональю на два равных треугольника. Образуется своеобразная «карта» с треугольными «странами». Требуется доказать, что треугольники можно раскрасить не более чем в три цвета, чтобы любые два треугольника, имеющие общий участок границы, были окрашены в разные цвета.



Справа изображён пример такого прямоугольника и его раскраски, удовлетворяющей условию (выбраны красный, жёлтый и зелёный цвета).

Для доказательства достаточно указать способ «правильной» раскраски. Будем закрашивать треугольники поочерёдно по строкам сверху вниз, а в каждой строке – слева направо. Тогда каждый очередной закрашиваемый треугольник имеет не более двух



[1] Примеры таких задач можно встретить в его же книге «Задачи на вырост», в издательстве МЦНМО как раз выходит новое издание!

[2] В исходном варианте задачи фигурировал не прямоугольник, а квадрат 10×10 (если элементарные квадратики считать единичными), но это, конечно, непринципиально.

уже окрашенных соседей – слева и сверху от себя. Поэтому всегда можно выбрать для него цвет, отличный от цветов этих соседей.

Изложив эту задачу (на мой взгляд, чересчур простую), Вячеслав Викторович спросил:

– А теперь представьте себе, что каждый квадратик, из которых составлен прямоугольник, разбит не диагональю на два равных треугольника, а **вертикальным или горизонтальным отрезком на два равных прямоугольника. Всегда ли можно получившуюся карту (состоящую на этот раз из прямоугольных стран) раскрасить в три цвета?**

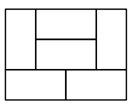
Вопрос заставил почесать голову, причём неоднократно. Не помогло. Наскоро сделанные прикидки с целью найти опровержение тоже ничего не дали.

Пришлось порассуждать. Понятное дело, сразу же вспомнилась знаменитая *проблема четырёх красок*, утверждающая, что любую карту на плоскости можно окрасить в четыре цвета, чтобы при этом любые две страны, имеющие общий участок границы, были окрашены по-разному[3]. Но здесь-то цветов только три!

Возникла робкая надежда, что где-то в литературе или на просторах интернета найдётся, скажем так, частный случай проблемы, доказывающий, что если все страны – равные прямоугольники, то для такой карты хватит и трёх цветов. А вдруг так оно и есть?

Бессильный выдумать что-то получше, я изложил свои соображения.

– Неверно! – тут же осадил меня Произволов. – Вот карта из равных прямоугольников, которую нельзя раскрасить в три цвета – четвёртый здесь необходим (рисунок справа).



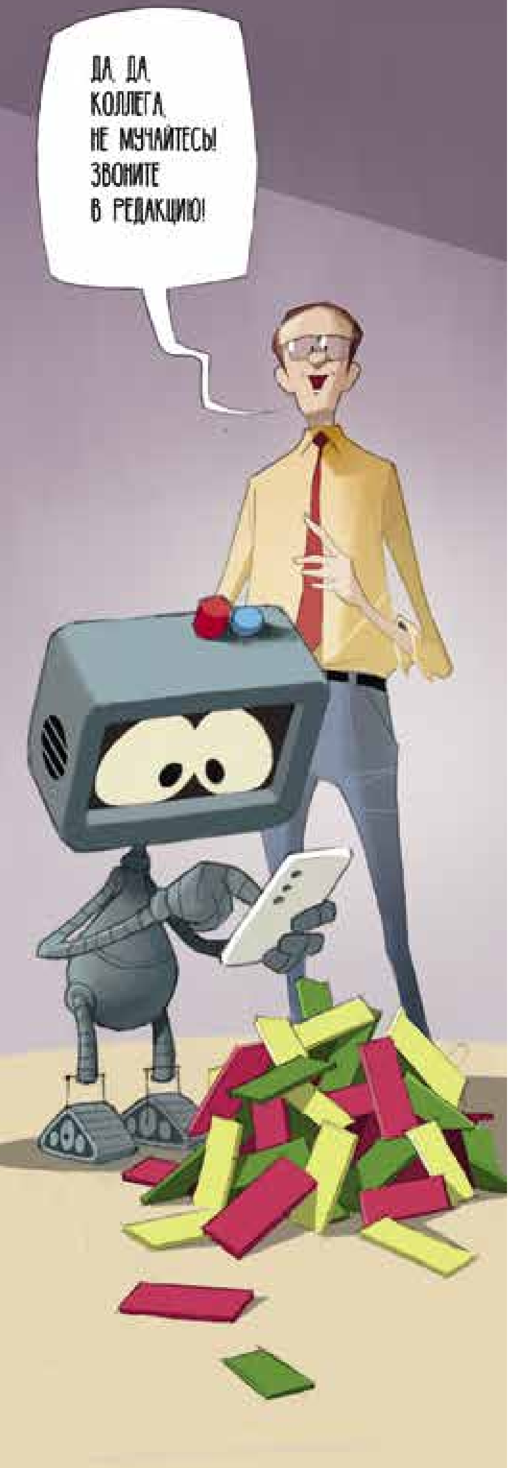
Поразмыслив, я согласился (а вы согласны?).

– Так каков же ответ? – поинтересовался я.

– Подумайте на досуге! – посоветовал мне Вячеслав Викторович, сдобрив свои слова сочувственной улыбкой. Да, он любил, чтобы собеседники думали сами, и здесь остался верен себе.

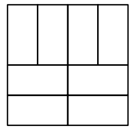
Больше нам встретиться было не суждено – общались только по телефону, который как-то не очень

[3] Впервые проблему четырёх красок чётко сформулировал английский математик Артур Кэли в 1878 году, а доказали её почти через сто лет американцы Кеннет Аппель и Вольфганг Хакен.

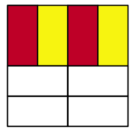


подходит для обсуждения задач такого рода (а к переписке по интернету Произволов относился почему-то довольно холодно). Так что правильное решение надолго осталось для меня тайной за семью печатями.

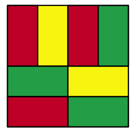
Попытка использовать алгоритм «правильной» раскраски, аналогичный тому, что был применён для карты из треугольников, показала его абсолютную неэффективность. Проявляется она уже для прямоугольных карт малых размеров – см. пример справа.



Если, следуя алгоритму, быстро и бездумно окрасить верхнюю строку в два цвета (что, кстати, представляется вполне естественным и логичным), то ситуация быстро заходит в тупик (рисунок ниже). Ведь два горизонтальных прямоугольника, непосредственно соседствующих с красными и жёлтыми, обязаны оба быть зелёными. Но они граничат между собой!



С другой стороны, так и не удалось обнаружить карту, которую нельзя было бы окрасить в три цвета. Каждый раз, используя метод проб и ошибок, удавалось добиться успеха: например, только что рассмотренную карту можно удачно раскрасить, как на рисунке справа.



Видимо, от отчаяния возник «треугольно-прямоугольный» вариант задачи Произволова. Пусть **каждый единичный квадрат, из которых составлен прямоугольник, разбивается произвольным образом либо на два равных треугольника, либо на два равных прямоугольника. Всегда ли можно «правильно» раскрасить такую карту в три цвета?**

Но и такой вариант одолеть не удалось. В последующие годы периодически возвращался к задаче, ковырял её со всех сторон – но тщетно. И лишь недавно нашёл эффективный выход: *обратиться за посторонней помощью*, а именно – в редакцию журнала «Квантик»! Результат превзошёл ожидания: решения обеих задач («прямоугольной» и «треугольно-прямоугольной») были найдены сотрудниками редакции в кратчайшие сроки и оказались они сравнительно несложными. Да, не зря Вячеслав Викторович улыбался на прощание!

Попробуйте докопаться до истины в каждом случае. А если не получится, – ответ в следующем номере.

Художник Алексей Вайнер