Игорь Акулич

ЕГО ПРОЩАЛЬНЫЙ ПОКЛОН: ОТВЕТЫ

1. *Из одинаковых квадратов составлен прямоугольник. Каждый квадрат произвольным образом разрезали на два равных прямоугольника. Можно ли раскрасить полученную карту, используя только красный, жёлтый и зелёный цвета так, чтобы любые два прямоугольника с общим участком границы были разного цвета?*

Вот решение, которое предложил Максим Прасолов. Ответ: раскраска всегда возможна. Опишем, как это сделать. Цвета будем называть сокращённо, по их первым буквам – К, Ж и З соответственно.

Введём понятие «квадрат КЖ». Это означает, что если единичный квадрат разбит на два горизонтальных прямоугольника, то верхний из них – красный, а нижний – жёлтый. Если же он разрезан на два вертикальных прямоугольника, то левый – красный, а правый – жёлтый. Аналогично будем понимать выражения «квадрат ЖЗ» и «квадрат ЗК».

Возьмём теперь произвольный прямоугольник, разбитый на единичные квадраты, и в каждом квадрате укажем схему его окраски (пока не разбивая никакой квадрат на прямоугольники). Эта схема такова (она приведена для прямоугольника 5×8, но может быть естественным образом «растянута» на любой прямоугольник иных размеров):

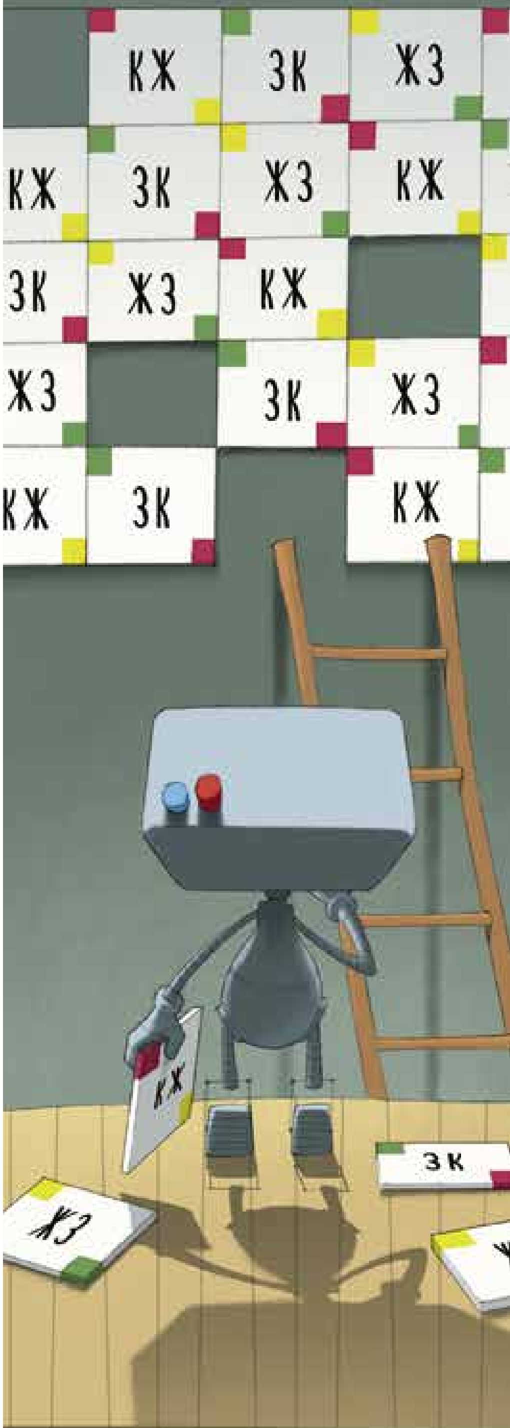
КЖ	ЗК	ЖЗ	КЖ	ЗК	ЖЗ	КЖ	ЗК
ЗК	ЖЗ	КЖ	ЗК	ЖЗ	КЖ	ЗК	ЖЗ
ЖЗ	КЖ	ЗК	ЖЗ	КЖ	ЗК	ЖЗ	КЖ
КЖ	ЗК	ЖЗ	КЖ	ЗК	ЖЗ	КЖ	ЗК
ЗК	ЖЗ	КЖ	ЗК	ЖЗ	КЖ	ЗК	ЖЗ

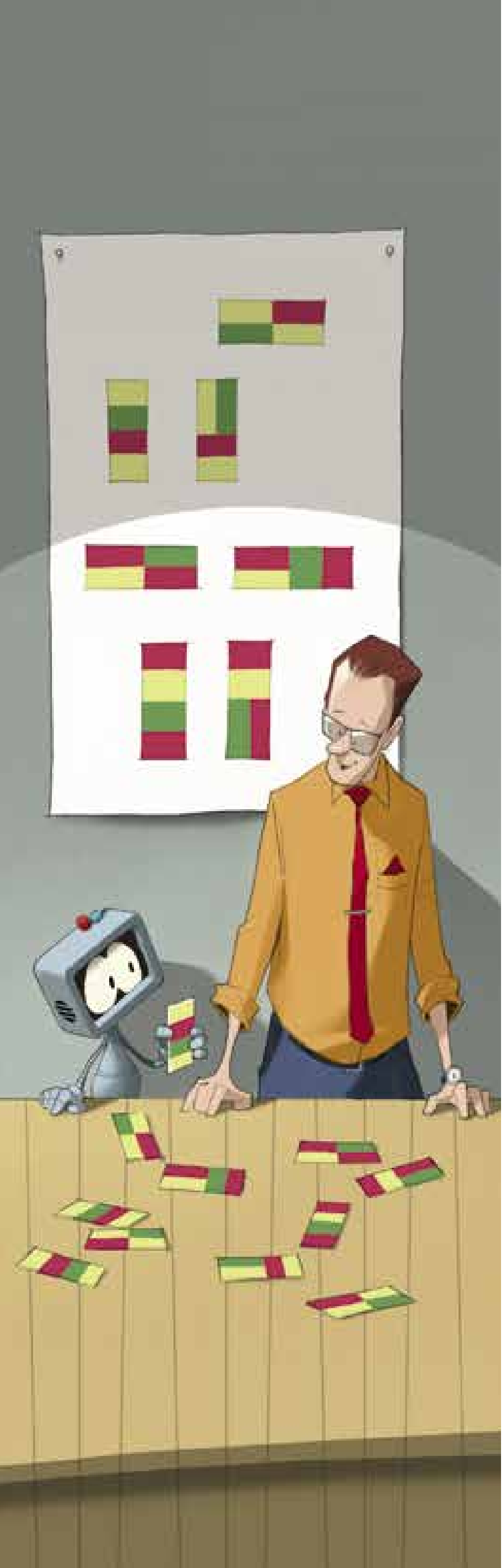
В каждой строке последовательно повторяются тройки квадратов КЖ, ЗК, ЖЗ, после чего снова КЖ и т.д. В столбцах (сверху вниз) – то же самое.

Оказывается, независимо от того, как разрезан каждый квадрат, – по вертикали или горизонтали – итоговая раскраска в три цвета будет «правильной».

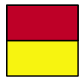
Чтобы в этом убедиться, возьмём для начала лю-

Решения задач из статьи «Его прощальный поклон» в «Квантике» №4 за 2022 год.

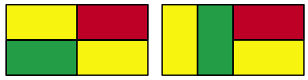




бой квадрат КЖ. Слева и сверху от него расположены квадраты ЖЗ, а справа и снизу – ЗК (если квадрат КЖ примыкает к границе, то соседей у него будет меньше четырёх, но от этого хуже не станет). Проверим, что при любых возможных разрезаниях соседей квадрата КЖ все прямоугольники, имеющие общий отрезок границы, будут окрашены в разные цвета.

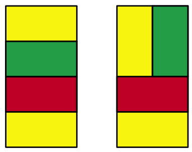
Для определённости пусть в квадрате КЖ разрез выполнен по горизонтали, вот так: 

Рассмотрим соседствующий с ним слева квадрат ЖЗ. Проверим на корректность два варианта его разрезания: по горизонтали и по вертикали. Вот как он «стыкуется» с нашим центральным квадратом (слева – одна возможность, справа – вторая):

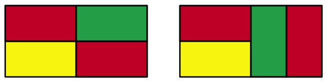


Таким же образом проверяем соседей квадрата КЖ сверху, справа и снизу. Вот что у нас получается.

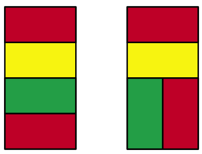
Сосед (ЖЗ) находится сверху:



Сосед (ЗК) находится справа:



Сосед (ЗК) находится снизу:



Как видим, всё в порядке. Но это, правда, только если центральный квадрат КЖ разрезан по горизонтали. А если по вертикали – тоже надо проверять?

Не надо! Ведь строки и столбцы прямоугольника, разбитого на единичные квадратики, совершенно равноправны. Картинка получится точь-в-точь такая же, но отражённая относительно диагонали.

Ладно, с квадратом КЖ разобрались – его соседи ведут себя вполне прилично (с точки зрения соседства по цветам). А квадраты ЖЗ и ЗК? Их тоже нет необходимости проверять, поскольку при «циклической смене цветов» (К на Ж, Ж на З, З на К или наоборот) получатся только что рассмотренные варианты, ибо и цвета тоже равноправны (если сомневаетесь – проверьте).

Итак, тремя цветами всегда можно обойтись.

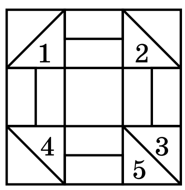
P.S. А что, если каждый квадратик разбивается вертикальными или горизонтальными отрезками не на два, а **на n равных прямоугольников, где n – натуральное число. При каких n получившуюся карту всегда можно «правильно» раскрасить в три цвета?**

Случай $n=2$ уже рассмотрен. Для $n=1$ задача тривиальна – получается обычная клетчатая доска, её можно раскрасить даже в два цвета. А что при $n>2$?

Нетрудно сообразить (и потом проверить), что для чётных n такая раскраска возможна, причём для неё можно применить всё тот же алгоритм (только здесь, например, квадрат КЖ означает раскраску нарезанных из него прямоугольников попеременно в красный и жёлтый цвета – слева направо или сверху вниз). Для нечётных же n вопрос остаётся открытым.

2. *Из одинаковых квадратов составлен прямоугольник. Каждый квадрат произвольным образом разрезали на две части – либо равные прямоугольники, либо равные треугольники. Можно ли раскрасить полученную карту, используя только красный, жёлтый и зелёный цвета так, чтобы любые две части с общим участком границы были разного цвета?*

Вот решение, которое предложил Александр Перепечко. Здесь ответ прямо противоположный: не каждую такую карту удастся правильно раскрасить. Чтобы в этом убедиться, предположим противное и рассмотрим схему разрезания прямоугольника 3×3 на рисунке справа (при этом не имеет значения, как разрезан его центральный квадратик, так что мы это и не указываем).



Некоторым из треугольников присвоим номера от 1 до 5, как на рисунке. Пусть треугольник 1 окрашен в какой-то цвет, для определённости – в красный. Тогда примыкающие к нему справа два прямоугольника должны быть жёлтым и зелёным, и потому треугольник 2 – тоже красный. Аналогично, треугольники 3, 4 и 5 – опять-таки красные. Но треугольники 3 и 5 граничат между собой – противоречие.

Художник Алексей Вайнер