



6 и 20 марта 2022 года состоялся весенний тур XLIII Турнира городов – международного математического соревнования для школьников. Приводим базовый и сложный варианты для 8–9 классов. В скобках после номера задачи указано число баллов, присуждавшихся за её полное решение. При подведении итогов у каждого участника учитываются три задачи, по которым он набрал больше всего баллов (баллы за пункты одной задачи суммируются).

Базовый вариант

1 [3]. Два человека шли по прямой дорожке навстречу друг другу с постоянными скоростями, но один – медленно, другой – быстро. Одновременно каждый отпустил вперёд от себя собаку (собаки бежали с одной и той же постоянной скоростью). Каждая собака добежала до другого хозяина и возвратилась к своему. Чья собака вернулась раньше – быстрого хозяина или медленного?

Александр Рубин

2 [4]. Петя взял произвольное натуральное число, умножил его на 5, результат снова умножил на 5, потом ещё на 5 и так далее. Верно ли, что с какого-то момента все получающиеся у Пети числа будут содержать 5 в своей десятичной записи?

Сергей Дориченко

3 [5]. На Поле Чудес выросло 11 золотых монет, но стало известно, что ровно четыре из них фальшивые. Все настоящие монеты весят одинаково, все фальшивые тоже, но они легче настоящих. Лиса Алиса и Буратино собрали монеты и стали их делить. Алиса собирается отдать Буратино четыре монеты, но он хочет сначала проверить, все ли они настоящие. Сможет ли он сделать это за два взвешивания на чашечных весах без гирь?

Александр Грибалко

4 [5]. На диагонали AC квадрата $ABCD$ взята точка P . Пусть H – точка пересечения высот треуголь-



ника APD , M – середина AD и N – середина CD . Докажите, что прямые PN и MH взаимно перпендикулярны.

Иван Кухарчук

5 [6]. Прямоугольник 1×3 будем называть *триминошкой*. Петя и Вася независимо друг от друга разбивают доску 20×21 на триминошки. Затем они сравнивают полученные разбиения, и Петя платит Васе столько рублей, сколько триминошек в этих двух разбиениях совпали (оказались на одинаковых позициях). Какую наибольшую сумму выигрыша может гарантировать себе Вася независимо от действий Пети?

Алексей Глебов

Сложный вариант

1 [4]. Найдите наибольшее натуральное число n со свойством: для каждого простого числа p , большего 2 и меньшего n , разность $n - p$ также является простым числом.

Игорь Акулич

2 [7]. Докажите, что из любого выпуклого четырёхугольника можно вырезать три его копии вдвое меньшего размера. (У копии соответственные углы равны исходным, а соответственные стороны – в два раза меньше исходных.)

Александр Юран

3 [7]. Для каждого из девяти натуральных чисел $n, 2n, 3n, \dots, 9n$ выписали на доску первую слева цифру в его десятичной записи. При этом n выбрали так, чтобы среди девяти выписанных цифр количество различных цифр было как можно меньше. Чему равно это количество?

Алексей Толпыго

4. В белом клетчатом квадрате 100×100 закрашено чёрным несколько клеток (не обязательно соседних). В каждой горизонтали или вертикали, где есть чёрные клетки, их количество нечётно, так что одна из клеток – *средняя* по счёту. Все чёрные клетки, средние по горизонтали, стоят в разных вертика-





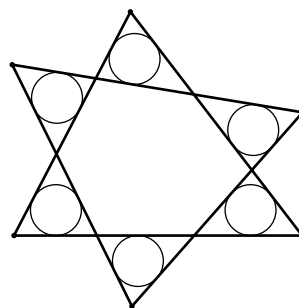
лях. Все чёрные клетки, средние по вертикали, стоят в разных горизонталях.

а) [5] Докажите, что найдётся клетка, средняя и по горизонтали, и по вертикали.

б) [5] Обязательно ли каждая клетка, средняя по горизонтали, средняя и по вертикали?

Борис Френкин

5 [10]. Два треугольника пересекаются по шестиугольнику, который отсекает от них шесть маленьких треугольников. Радиусы вписанных окружностей этих шести треугольников равны. Докажите, что радиусы вписанных окружностей двух исходных треугольников также равны.



Андрей Кушнир

6 [10]. Для турнира изготовили 7 золотых, 7 серебряных и 7 бронзовых медалей. Все медали из одного металла должны весить одинаково, а из разных должны иметь различные массы. Но одна из всех медалей оказалась нестандартной – имела неправильную массу. При этом нестандартная золотая медаль может весить только меньше стандартной золотой, бронзовая – только больше стандартной бронзовой, а серебряная может отличаться по весу от стандартной серебряной в любую сторону. Можно ли за три взвешивания на чашечных весах без гирь найти нестандартную медаль?

Александр Грибалко

7 [12]. На плоскости нарисован выпуклый многоугольник M , и дано простое число p . Оказалось, что существует ровно p разбиений многоугольника M на равносторонние треугольники со стороной 1 и квадраты со стороной 1. Докажите, что длина одной из сторон многоугольника M равна $p-1$.

Николай Белухов

Художник Сергей Чуб

