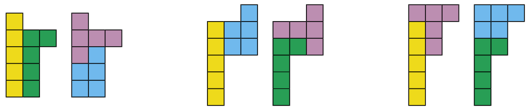
НАШ КОНКУРС, VIII тур
(«Квантик» № 4, 2022)

36. *У почтальона есть пачка конвертов, из которой ему нужно взять ровно 50 штук. Пока он стоял и методично отсчитывал по одному конверту, к нему подошёл сын-пятиклассник и сказал: «Если бы ты знал, сколько конвертов во всей пачке, то справился бы в два раза быстрее!» Что имел в виду сын и сколько конвертов во всей пачке?*

В пачке было 75 конвертов, почтальон мог отсчитать «лишние» 25 и взять оставшиеся 50.

37. *Есть четыре различные пентаминошки (пятиклеточные фигурки). Известно, что как ни разбивай их на пары, пентаминошки в каждой паре можно сложить так, что получатся две одинаковые фигуры. Приведите пример, как такое может быть.*

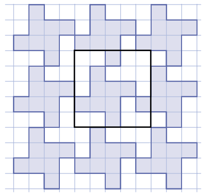
Ответ: см. примеры на рисунке.



38. *Робот Квантик переставил числа в строке* 1, 2, 3, ..., 100 *так, чтобы получился «алфавитный порядок», то есть сначала идут числа, начинающиеся с 1, затем начинающиеся с 2 и т.д. (числа, начинающиеся с одной цифры, упорядочиваются по второй цифре). Получилась строка:* 1, 10, 100, 11, 12,... *Сколько чисел осталось на своём месте?*

Ответ: 11. Из чисел, начинающихся с 1, на месте осталась лишь 1; среди чисел, не меньших 20, каждые 10 чисел, начинающихся с одной и той же цифры, в «алфавитном» порядке также идут друг за другом. Значит, достаточно понять, сколько из чисел 20, 30, ..., 90 остались на месте – следующие 9 за каждым из них соответственно либо также останутся на месте, либо нет. Перед числом $n\cdot 10$ в «алфавитном» порядке будут 100 и все те же числа, которые шли перед ним в порядке возрастания, кроме $n+1$, $n+2$, ..., 9. Значит, количество чисел, идущих перед $n\cdot 10$ для n от 2 до 9, при переходе от порядка возрастания к «алфавитному» изменяется на $+1-(9-n)$, то есть не изменится при $1-9+n=0$, $n=8$. Тогда 80 (а значит, и 81, ..., 89) останутся на своих местах, а остальные числа, кроме 1, сдвинутся.

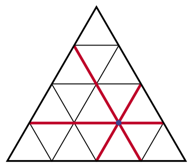
39. *Покрасьте некоторые клетки белого квадрата* 5×5 *в синий цвет так, чтобы во всех 16 квадратах* 2×2 *раскраски были различны (не совмещались бы сдвигом).*



Раскрасим плоскость, как на рисунке. Любой квадрат 5×5 (например, выделенный) будет раскрашен как надо.

А ещё можно вырезать из этого рисунка любой квадрат 4×4 и, считая, что он сделан из тянущегося материала, превратить его сначала в трубочку, состыковав две противоположные стороны, а потом состыковать концы трубочки (не перекручивая её). Получится бублик (по-научному – тор), разделённый на 16 клеток, в котором любое поле 2×2 раскрашено по-своему!

40. *Через точку внутри равностороннего треугольника провели прямые, параллельные сторонам, и измерили площади полученных шести частей треугольника. Могло ли оказаться, что они принимают ровно три различных значения?*

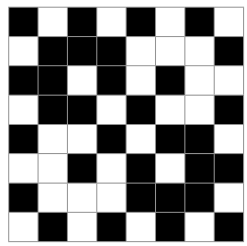


Ответ: могло. Разделим треугольник на 16 равных равносторонних треугольников и проведём прямые, как на рисунке. Тогда все части состоят из 1, 2 или 4 маленьких треугольников.

КТО ВЗЯЛ ЛОДКУ? («Квантик» №5, 2022)

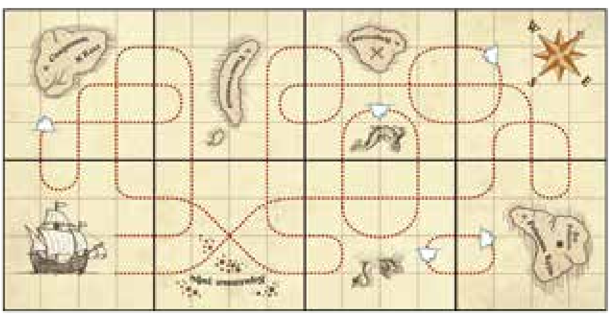
Открыв любой замок, можно вытащить большой стержень и взять лодку. А по номерам оставшихся закрытых замков ясно, кто её взял.

ОПЕЧАТКА В «КВАНТИКЕ» № 5 за 2022 год



В печатной версии предыдущего номера в задаче 41 «Нашего конкурса» допущена опечатка в картинке. Приносим свои извинения и приводим верную картинку. Срок присылки решений этой задачи продлевается до 25 июня.

МОРСКОЕ ПУТЕШЕСТВИЕ



ПАЛКА И ТОЧКА РАВНОВЕСИЯ

Пока пальцы раздвинуты, бóльшая нагрузка приходится на тот палец, который ближе к центру тяжести палки. С давлением растёт и трение: палец, более близкий к центру тяжести, испытывает большее трение, чем удалённый. Поэтому близкий к центру тяжести палец не скользит под палкой. Как только двигавшийся палец окажется ближе к центру тяжести, чем другой, пальцы меняются ролями; такой обмен совершается несколько раз, пока пальцы не сойдутся вплотную под центром тяжести палки.

На весах чашка со щёткой перетянет: ведь когда щётка уравновешивалась на пальцах, силы веса обеих частей приложены были к неравным плечам рычага; в случае же весов те же силы приложены к концам равноплечего рычага.

ПАРАДОКС БЕРТРАНА

1. Возьмём один отпечаток и посмотрим на центры отпечатков, с ним пересекающихся. Они равномерно распределены в круге вдвое большего радиуса. Тогда середина отрезка, соединяющего центры отпечатков, равномерно распределена в исходном отпечатке. Это и есть середина хорды. Получаем метод случайного центра и вероятность $1/4$.

2. Поскольку направление следа не влияет на длину хорды, будем считать след вертикальным. Тогда он перпендикулярен горизонтальному диаметру, и точка пересечения равномерно распределена на нём. Получаем метод случайного радиуса и вероятность $1/2$.

3. Все лепестки равноправны, поэтому длина кратчайшей дуги, соединяющей концы лепестков, равномерно распределена в интервале от 0 до половины длины окружности. Поэтому вероятность $1/3$, как в методе случайных концов.

XLIII ТУРНИР ГОРОДОВ. Весенний тур, 8–9 классы

Базовый вариант

1. Ответ: собаки вернулись одновременно.

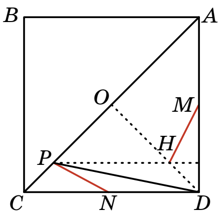
Пусть L – расстояние между людьми в момент, когда они отпустили собак, v и V – скорости людей ($V > v$), u – скорость собак. Собака медленного хозяина добежит до быстрого за время $\frac{L}{u+V}$ и за это время убежит от своего хозяина на расстояние $\frac{L(u-v)}{u+V}$, а вернётся к нему за время $\frac{L(u-v)}{(u+V)(u+v)}$. Общее время её «путешествия» равно $\frac{L}{u+V}+\frac{L(u-v)}{(u+V)(u+v)}=\frac{2Lu}{(u+V)(u+v)}$. Тот же результат получим для другой собаки.

А ещё задачу можно решить геометрически – см. статью И. Акулича «За двумя зайцами» и ответ к ней в «Квантиках» № 1 и 2 за 2022 год.

2. Ответ: верно. Запишем исходное число в виде $2^k m$, где m нечётно («вынесем все двойки»). После $k+1$ умножений на 5 число будет оканчиваться на k нулей с пятёркой перед ними, и она сохранится при дальнейших умножениях.

3. Ответ: сможет. Пусть Буратино положит на чаши по две свои монеты. Если одна из чаш перевесит, то среди его монет есть фальшивые.

При равновесии у Буратино могут быть 0, 2 или 4 фальшивые монеты. Тогда на одну чашу он положит свои монеты, а на другую – 4 монеты Лисы. Если все монеты Буратино настоящие, его чаша перевесит (ведь настоящих монет только 7), в остальных случаях – нет, так как при этом у Лисы не более двух фальшивых монет.



4. При одном из поворотов на 90° вокруг центра O квадрата точки A, D, M перейдут в точки D, C, N соответственно. Так как OPH – равнобедренный прямоугольный треугольник, H перейдёт в P. Тогда отрезок MH перейдёт в NP, поэтому они перпендикулярны.

Замечание. Если треугольник APD тупоугольный, H лежит вне его, но решение то же.

5. Ответ: 14 рублей. Пусть вертикальная сторона доски равна 20, а горизонтальная – 21.

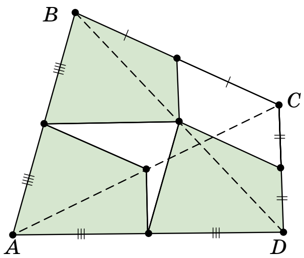
Пример. Покажем, как Васе гарантировать себе не менее 14 рублей. Он разбивает доску на горизонтальные триминошки. Пусть число Петиных горизонтальных триминошек с центром в i-м столбце равно a_i. В i-й столбец залезают триминошки с центрами в столбцах $i-1$, i и $i+1$. Так как в столбце 20 клеток, а вертикальная триминошка покрывает 3 клетки, сумма $a_{i-1}+a_i+a_{i+1}$, даёт остаток 2 при делении на 3. Сумма $a_i+a_{i+1}+a_{i+2}$ тоже даёт остаток 2 при делении на 3, откуда остатки у a_{i-1} и a_{i+2} одинаковы. Число центров горизонтальных триминошек, попавших в столбец 2, даёт остаток 2 при делении на 3, откуда в каждом из столбцов 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20 лежат центры хотя бы двух горизонтальных триминошек Пети. Они совпадут с Васиными, что даст ему не менее 14 рублей.

Оценка. Можно считать, что Петя знает Васино разбиение. Верхние две строки Петя разбивает на горизонтальные триминошки, они дадут Васе не более 14 совпадений. Оставшуюся доску Петя делит на квадраты 3×3. Если в какой-то квадрат полностью входит Васина горизонтальная триминошка, Петя разобьёт его на вертикальные триминошки, иначе – на горизонтальные, и в этом квадрате не будет совпадений.

Сложный вариант

1. Ответ: $n=10$. При $n>10$ числа $n-3$, $n-5$, $n-7$ больше 3, а одно из них кратно 3, поэтому $n\leqslant10$. Число $n=10$, очевидно, подходит.

2. Сумма углов четырёхугольника $ABCD$ равна $360°$. Поэтому среди сумм $\angle A+\angle B$ и $\angle C+\angle D$ одна не больше $180°$, и среди сумм $\angle B+\angle C$ и $\angle D+\angle A$ – тоже. Пусть это, например, суммы $\angle A+\angle B$ и $\angle D+\angle A$. Разместим тогда в углах A, B и D уменьшенные в 2 раза копии четырёхугольника, как на рисунке. Копия с углом A не пересечётся с остальными копиями из-за неравенства на суммы углов, а копии с углами B и D имеют лишь одну общую точку – середину диагонали BD (их «разделяют» два параллелограмма).



3. Ответ: 4. *Пример*. При $n=34$ получаем первые цифры 3, 6, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3.

Оценка. Поделим n на такую степень десятки, чтобы для полученного числа m (не обязательно целого) выполнялось $1\leqslant m<10$, и решим задачу для m (первые цифры не изменятся).

Среди чисел km какие-то меньше 10, а какие-то могут быть не меньше. Назовём «местом перескока» то наименьшее k, для которого $km\geqslant10$. Из неравенств $1\leqslant m<10$ следует, что все первые цифры до перескока – разные, а первые цифры после перескока могут совпадать, но идут подряд: 1, 2, 3 и т.д. Поэтому:

Если $1\leqslant m<2{,}5$, есть хотя бы 4 числа до перескока, и у них разные первые цифры.

Если $2{,}5\leqslant m<10/3$, есть хотя бы три разные цифры до перескока (и они не меньше 2), а ещё цифра 1 (после перескока).

Если $10/3\leqslant m<4$, до перескока не менее двух цифр (и они больше 2), а после – цифры 1 и 2.

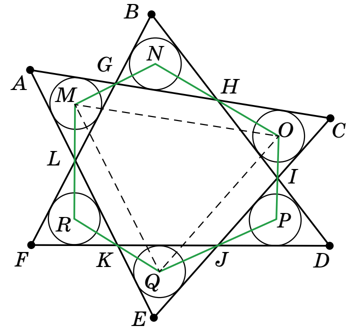
Если $m\geqslant4$, есть цифры 1, 2, 3 после перескока и одна цифра (не меньше 4) до перескока.

4. а) Запишем в каждую клетку, среднюю по вертикали, букву В, а в каждую клетку, среднюю по горизонтали, – букву Г. Выбросим все горизонтали и вертикали без чёрных клеток. Теперь в каждой вертикали есть клетка с В. Все эти клетки стоят в разных горизонталях, поэтому горизонталей не меньше, чем вертикалей. Аналогично вертикалей не меньше, чем горизонталей, то есть их поровну. Значит, в каждой вертикали есть клетка с Г. Рассмотрим клетку с Г в самой левой вертикали. В горизонтали, где она стоит, ровно одна чёрная клетка. Но в этой горизонтали есть клетка с В, тогда она совпадает с этой единственной чёрной клеткой.

б) Ответ: нет, см. пример для квадрата 6×6 (В – клетка, средняя по вертикали, Г – по горизонтали, О – и по вертикали, и по горизонтали). Добавив нужное число белых клеток вокруг, получим квадрат 100×100.

	О				
О					
		В	Г		
		Г	В		
					О
				О	

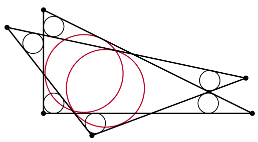
5. Обозначим точки, как на рисунке.



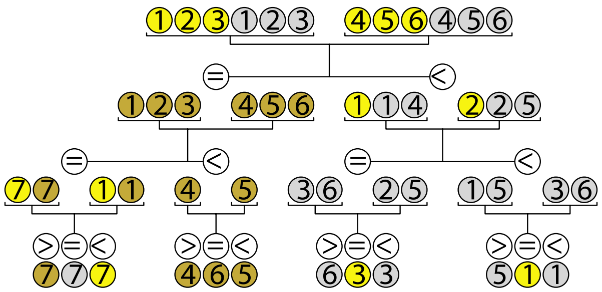
Пусть r – радиус вписанной окружности маленького треугольника, $2p$ – периметр шестиугольника $GHIJKL$, S – площадь шестиугольника $MNOPQR$. Заметим, что радиус вписанной окружности треугольника MOQ на r меньше радиуса вписанной окружности треугольника ACE. То же верно для треугольников NPR и BDF. Поэтому достаточно доказать равенство радиусов вписанных окружностей треугольников MOQ и NPR. Для этого достаточно доказать равенство их периметров и площадей.

Но $GH+IJ+KL=HI+JK+LG=p$ (поскольку касательные из каждой точки G, H, I, J, K, L к двум «соседним» с этой точкой маленьким окружностям равны). Так как GH – средняя линия треугольника MNO и т.д., периметр треугольника MOQ равен $2p$. Кроме того, $S_{MNO}=\frac{1}{2}MO\cdot 2r=$ $=MO\cdot r$, и т.д., значит, $S_{MOQ}=S-2pr$. То же верно для треугольника NPR.

Замечание. Исходные треугольники не обязательно равны, а их вписанные окружности не обязательно совпадают, см. рисунок.



6. Взвешивания приведены на схеме (золотые монеты – жёлтые, серебряные – серые, бронзовые – коричневые). Случаи, когда левая чаша перевешивает, разбираются аналогично.

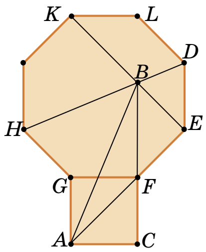


7. Решение см. в статье в одном из следующих номеров нашего журнала.

LXXXV МОСКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА: избранные задачи

1. Пример: $\frac{20}{2-\sqrt{2}} = \frac{20(2+\sqrt{2})}{2} = 20+10\sqrt{2} > 30$.

2. Ответ: 22,5°. Угол правильного восьмиугольника равен $6 \cdot 180^\circ : 8 = 135^\circ$. Обозначим вершины восьмиугольника так, как на рисунке. HD – ось симметрии восьмиугольника, поэтому диагонали KE и LF пересекаются в точке B. Заметим, что $KLDE$ и $LDEF$ – равнобокие трапеции, поэтому $\angle KED = 45^\circ$ и $\angle LFE = 45^\circ$. Значит, $\angle FEB = 135^\circ - 45^\circ = 90^\circ$ и $\angle GFB = 90^\circ$, откуда точки C, F и B лежат на одной прямой (по рисунку кажется, что это так – но этот факт нужно доказать!). Треугольники BEF и FCA равны по катету и острому углу, значит, $BF = FA$.



Далее, $\angle AFB = \angle AFG + \angle GFB = 135^\circ$. Поэтому в равнобедренном треугольнике AFB сумма углов при основании равна 45°, откуда $\angle ABC = 45^\circ : 2 = 22{,}5^\circ$.

3. Обозначим массы монет торговцев A_1, A_2, A_3 и B_1, B_2, B_3 соответственно. Первыми двумя взвешиваниями сравним A_1 с B_1 и A_2 с B_2.

1) Для начала рассмотрим случай двух равенств: $A_1 = B_1$ и $A_2 = B_2$. В этом случае также $A_3 = B_3$. Тогда сравним $A_1 + A_2$ с $A_3 + B_3$. Возможны только три случая: $9+10 < 11+11$, $9+11 = 10+10$ и $10+11 > 9+9$. Поэтому мы однозначно определим массы монет A_3 и B_3, а также массы $A_1 = B_1$ и $A_2 = B_2$ с точностью до порядка. Последним взвешиванием достаточно сравнить A_1 с A_2.

В остальных случаях сравним также A_3 с B_3. С точностью до переименования монет, возможны ещё два случая.

2) $A_1 < B_1$, $A_2 < B_2$, $A_3 > B_3$. В этом случае монеты A_1 и A_2 не могут весить 11 г, значит, они весят 9 и 10 г, а монета A_3 – 11 г. Аналогично монеты B_1 и B_2 весят 10 и 11 г, а монета B_3 – 9 г. При этом первые два неравенства – это $9 < 10$ и $10 < 11$ с точностью до порядка. Последним взвешиванием сравним A_1 с A_2 и определим массы всех монет.

3) $A_1 < B_1$, $A_2 > B_2$, $A_3 = B_3$. В этом случае $A_1 = B_2$ и $A_2 = B_1$. По аналогии с первым случаем сравним $A_1 + A_2$ с $A_3 + B_3$, в результате определим вес монет A_3 и B_3 а также веса $A_1 = B_2$ и $A_2 = B_1$ с точностью до порядка. Но в этом случае нам уже известно, что $A_1 = B_2 < A_2 = B_1$, поэтому и эти массы определяются однозначно.

Другие случаи невозможны, так как суммы масс монет A и монет B равны.

4. Ответ: $2N-1$.

Пример. Ладья идёт «змейкой»: сначала слева направо по всей нижней горизонтали, потом по следующей (в обратную сторону) и т.д. Наибольшая разность номеров соседних клеток будет между клетками $2N$ и 1, $3N$ и $N+1$ и т.д.

Оценка. Предположим противное: $M < 2N-1$. Рассмотрим числа верхней строки. Поскольку разность между любыми соседними числами в этой строке не больше $2N-2$, ладья дошла от меньшего из них к большему, не заходя в нижнюю строку (ведь чтобы достичь нижней строки, надо сделать минимум $N-1$ ходов, и чтобы вернуться – тоже минимум $N-1$, плюс ещё хотя бы один ход нужно сделать в нижней строке). Тогда все числа верхней строки ладья обошла, не заходя в нижнюю строку. Аналогично, все числа нижней строки ладья обошла, не заходя в верхнюю. Это значит, что все числа верхней строки больше (или все меньше) чисел нижней строки, а все числа левого столбца больше (или все меньше) чисел правого столбца.

Не теряя общности, пусть числа левого столбца больше чисел правого, а числа нижней строки больше чисел верхней. Рассмотрим число A в левом верхнем углу и число B в правом нижнем. С одной стороны, $A > B$ (по столбцам), а с другой $A < B$ (по строкам). Противоречие.