Константин Кохась

КАК ГОРГУЛИЙ ДЕЛИЛ «УГОЛКОМ»

– Раз, два, три – поворот, левой-левой, правой-правой – под-скок! – подсказывал сам себе таракан Кузька. Он медленно двигался вдоль стенки, крутясь и подпрыгивая, словно танцуя, и время от времени выписывал на стену какие-то цифры.

– Разучиваешь танец? – спросила Бусенька.

– Не сбивай меня, я считаю!

– Размахивая лапами во все стороны?

– У нас, насекомых, очень маленький мозг. При счёте мы используем лапы, усы и окружающие предметы, а также применяем разные хитрости, чтобы не переутомиться. Помнится, я тебе объяснял уже, как мы умножаем на 5.[1] Вот и сейчас я не танцую, а считаю. Я делю 5 на 7!

– И как успехи?

– Я уже 20 минут делю, пишу всё новые и новые цифры, а деление всё не кончается. Может быть, 5 не делится на 7?

– Делится, делится. То, что ты делаешь, называется «записывать обыкновенную дробь в виде десятичной». Просто учти, что не все числа записываются конечными десятичными дробями. Ты заметил, что танец у тебя довольно ритмичный – движения сложные, но они всё время повторяются, повторяются?

– Заметил, заметил. И что, и что?

– Так у тебя и цифры повторяются. Посмотри на стенку: вот эта группа из шести цифр встречается всё снова и снова:

$$\frac{5}{7}=0,\underbrace{714285}\underbrace{714285}\underbrace{714285}\ldots$$

– Что же теперь делать?

– Да ничего. Эти цифры и дальше будут повторяться. Такая повторяющаяся группа цифр называется *период*. Твой ответ – бесконечная периодическая дробь. Чтобы записать её покороче, вместо всех этих повторяющихся периодов пишут только самый первый, заключив его в скобки, вот так:

$$\frac{5}{7}=0,(714285).$$

[1] Об этом написано в сказке «Как Бусенька умножала на пять» в «Квантике» № 8 за 2014 год.

– Здорово! – сказал Кузька. – Тогда я сейчас быстренько всё досчитаю! Теперь мне нужно поделить 7 на 11. – И он снова завертелся в каком-то невообразимом танце:

$$\frac{7}{11}=0{,}63636363...=0{,}(63).$$

– Готово! И наконец, перемножим эти две дроби!

– Зачем? – спросила Бусенька.

– Огрыза как-то сказала, что у неё в Ам-баре в запасах варенья каждые 7 банок из 11 – варенье брусничное с яблоками. А в листке отрывного календаря от 18 августа я прочёл, что варенье брусничное с яблоками варится из пяти частей брусники и двух частей яблок. Вот я и хочу узнать, какую долю всего варенья у Огрызы составляет чисто брусничное варенье.

– А почему тебе хочется это знать?

– Ненавижу бруснику!

Бусенька с уважением посмотрела на Кузьку.

– А по-другому ты эти дроби перемножить не можешь?

– По-другому я не умею. Я же говорю, оперативная память и всё такое. Математика трудна для насекомых.

– И как же ты будешь их умножать?

– Как обычно. В столбик! Сначала умножаем первое число на самую правую цифру второго, потом на вторую справа цифру, потом на третью …

– Но где ты возьмёшь самую правую цифру? Мы записали эти дроби коротко, спрятав период в скобки, но на самом-то деле они бесконечные, причём как раз вправо! У них нет самой правой цифры!

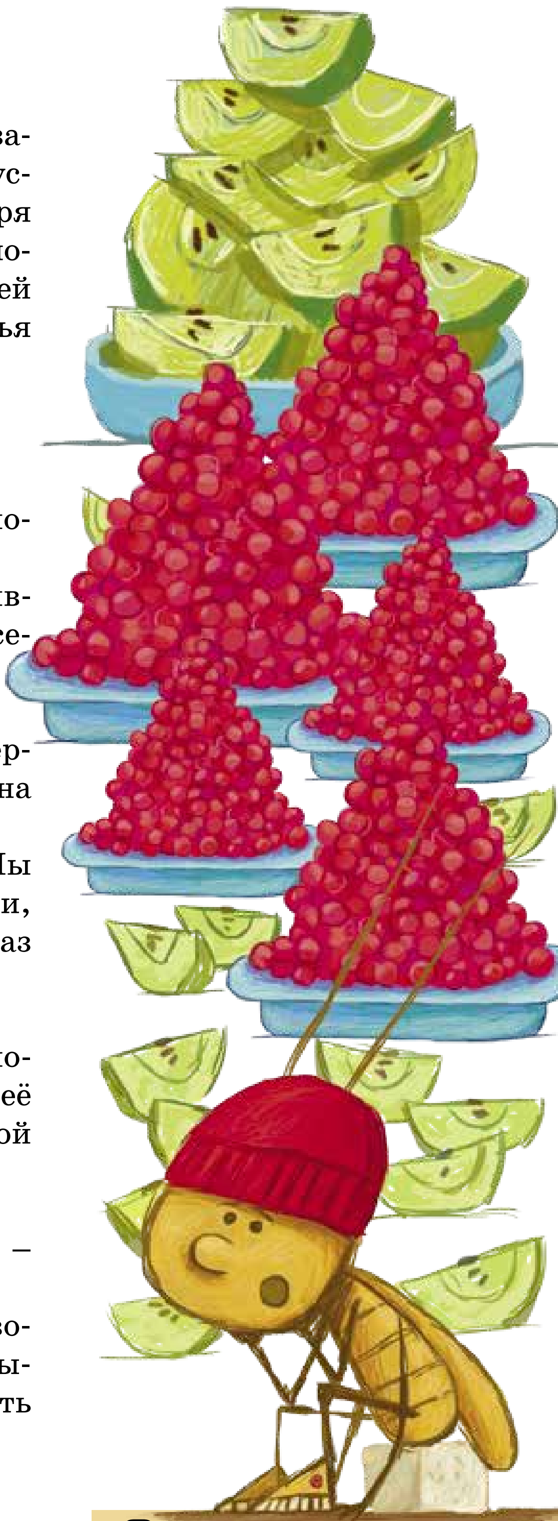
– Упс, – сказал Кузька.

– А если бы ты их всё же перемножил, у тебя получилась бы снова бесконечная дробь. Как бы ты её превратил в обыкновенную? Вот например, какой обыкновенной дроби равна дробь

$$0{,}166666... = ?$$

– Какие-то трудности? – раздался голос сзади. – Сейчас всё превратим, исправим и починим!

– Горгулий! – воскликнула Бусенька, – как вовремя ты пришёл. У нас тут проблемы с бесконечными десятичными дробями: мы не умеем их умножать и конвертировать в обыкновенные.



– Конвертировать? Вот эту? Не умеете умножать? Не скромничайте. Уж на 10 или на 100 вы, я думаю, запросто её умножите. Например, умножение на 100 – это просто сдвиг десятичной запятой на два разряда. А большего для конвертации и не требуется. Смотрите. Обозначим $x = 0{,}166666\ldots$ Тогда $100x = 16{,}6666\ldots$ Вычитаем в столбик, получаем $99x = 16{,}5$.

$$\begin{array}{r} -\;100x = 16{,}66666\ldots \\ x = \;\;0{,}16666\ldots \\ \hline 99x = 16{,}50000\ldots \end{array}$$

Отсюда $x = \frac{16{,}5}{99} = \frac{33}{2 \cdot 99} = \frac{1}{6}$.

– Понятно! – воскликнула Бусенька. – А перемножить дроби в столбик ты можешь? – И она объяснила Горгулию, в чём состоит возникшее затруднение.

– Значит, вы поделили 5 на 7... Похоже, ты правша? – неожиданно спросил Горгулий Кузьку.

– Да... в среднем... правша, – ответил Кузька.

– Что значит «в среднем правша»?

– Ну видишь: у меня 6 лап. Две задние можно считать ногами, а передние и средние – это скорее руки. Кусочек мела я держу средней правой рукой – мне так удобнее. Значит, в среднем я правша.

– Вот в этом всё дело – сказал Горгулий. – Ты делишь правым способом. А я левша и буду делить левым! – И Горгулий стал делить. – Дополним делимое, то есть число 7, слева нулями, получится ...000007. Записываем деление «уголком». Последняя цифра делимого – 7. На что нужно умножить 11, чтобы на конце получилось 7? На 7. Значит, последняя цифра частного 7! Пишем в клеточку частного цифру 7, вычитаем из делимого $11 \cdot 7 = 77$, получается 30, ноль отбрасываем.[2] Далее сносим очередную цифру делимого – раньше там были нули, но при вычитании мы заняли одну единицу, теперь там девятки. Итак, очередное неполное делимое 93, его последняя цифра – 3. Чтобы получить на конце 3, нужно 11 умножить на 3. Значит, очередная цифра частного – это 3. Записываем её, вычитаем из 93 произведение $11 \cdot 3 = 33$, получается 60, ноль опять отбрасываем.

$$\begin{array}{r|r} 11 & 000007 \\ \hline \ldots 7 & \underline{77} \\ & 3 \end{array}$$

[2] Монстропитеки любят делить и при делении часто отбрасывают нули, об этом можно прочесть в сказке «Как Бусенька умножала на одиннадцать» в «Квантике» №9 за 2014 год.

К этой шестёрке добавляем очередную цифру делимого – 9. Получилось 96. Очередная цифра частного – это 6, вычитаем $11 \cdot 6 = 66$, ноль опять отбрасываем, ну и так далее. Итого

$$\frac{7}{11} = \ldots 6363637.$$

```
         11|000007
  ...63637|     77
               930
                33
               96
               66
              93
              33
             96
             ...
```

О, я вижу, вы период в скобочках записываете. Тогда можно вот так:

$$\frac{7}{11} = (63)7.$$

– А где же у этого числа десятичная запятая? Оно что – натуральное? – спросил Кузька.

– Нет, конечно, потому что число его цифр не конечно! А десятичной запятой нету – не понадобилась.

– Но его запись бесконечно продолжается влево – как же это понимать? Вот у него в разряде сотен стоит 6. Оно что – больше 600?

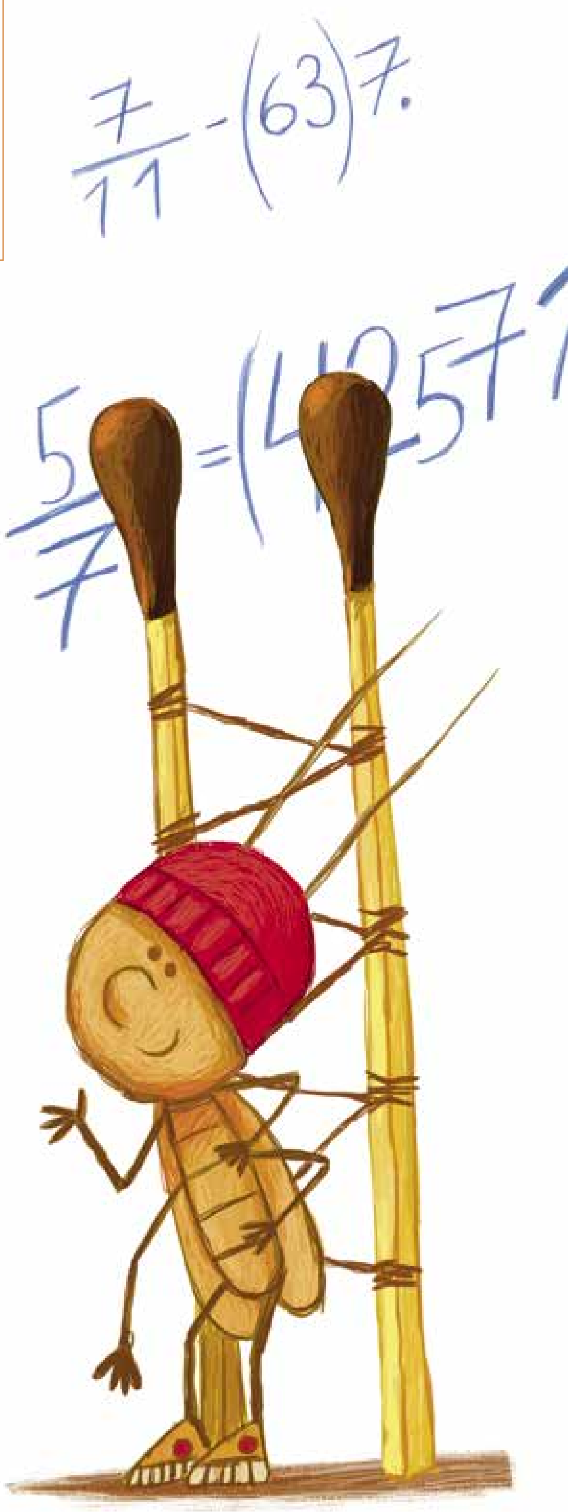
– Нет, не больше, и никак этого понимать не надо. Просто твои дроби записывались бесконечно вправо, а мои – влево. Для сравнения чисел такая запись не годится. Но ты же не сравнивать собрался, а умножать, а для умножения эта запись как раз таки очень удобна! На что там нужно его умножить – на 5/7? Тогда поделим 5 на 7:

$$\frac{5}{7} = (428571)5.$$

Теперь у нас есть оба множителя и оба они – бесконечные влево. Когда мы умножаем числа в столбик, мы выполняем все вычисления, начиная от правого края. У наших множителей есть надёжный правый край, так что будем перемножать в столбик по обычному алгоритму, и то, что записи чисел бесконечно простираются влево, нам не помешает:

```
   ...1428571 5
     ...363637
  -------------
     ...000005
    ...857145
  ...5714290
  ...857145
       ...
  -------------
     ...545455
```

– Вот это да! – воскликнула Бусенька. – Первый сомножитель – это ведь $\frac{5}{7}$, умножая его на первую цифру второго сомножителя, то есть на 7, мы действительно получаем ...00005!



– При вычислении такого произведения, – продолжал Горгулий, – только одна проблема: чем дальше цифра от края, тем сложнее её найти. К счастью, если сомножители периодические, то и произведение периодическое, и не нужно вычислять все его цифры (да мы это и не можем). Нужно лишь понять, какой у него период. Наше произведение равно ...4545455 и период легко угадывается: $...4545455=(45)5$.

– И что это за дробь? – оторопело спросил Кузька.

– Конвертировать в обыкновенную? Пожалуйста, только что делали что-то похожее. Пусть x =...4545455. Тогда $100x=...4545500$. Вычитаем.

$$\begin{array}{r} 100x=...4545500 \\ -\quad x=...4545455 \\ \hline 99x=...0000045 \end{array}$$

Значит, $x=\frac{45}{99}=\frac{5}{11}$.

– Монстрошаманство, – пробормотал Кузька и зевнул.

– Потрясающее монстрошаманство, – согласилась Бусенька. – Но как-то неубедительно про период. Почему 45? Вдруг там левее закономерность нарушится?

– Ну вообще-то длина периода произведения не больше, чем произведение длин периодов сомножителей. Чтобы строго доказать, что период состоит из двух цифр (45), следовало просто вычислить побольше цифр и убедиться, что для них тоже соблюдается периодичность с периодом (45).

Кузька закрыл глаза, уронил голову и захрапел.

– А как ты запишешь $\frac{1}{6}$ в виде бесконечного влево числа? – прошептала Бусенька.

– Ну... ээ... Одну шестую... Да, тут похитрее: левое деление не работает, если мы делим на чётное число или число, кратное 5. А у нас $6=2\cdot3$ – содержит множитель 2. Выход прост и изящен: для деления на 3 используем левый способ, а для деления на 2 (и на 5, если бы был множитель 5) – правый! На этот раз десятичная запятая нам очень даже пригодится!

$$\frac{1}{6}=\frac{1/3}{2}=\frac{...66667}{2}=...33333{,}5.$$

Поскольку правый способ мы используем только для деления на 2 и на 5, в дробях всегда будет конечное число цифр после запятой. То есть влево они будут бесконечные, а вправо – обязательно конечные!

Художник Инга Коржнева