Артемий Соколов

# Диаграммы Вороного

Придя домой после школы, Петя обнаружил, что мама купила ему в подарок новый набор цветных карандашей. Как же ему не терпелось их все испытать! Петя взял белый лист бумаги и каждым карандашом отметил по одной точке. Хм, пишут! Этого ему оказалось мало, и он захотел раскрасить весь лист.

– Но как сделать так, чтобы было красиво и интересно? – задумался Петя. – Наверное, рядом с каждой точкой должны быть точки такого же цвета, правда? Иначе будет рябить в глазах.

И Петя решил сделать так: выбирая каждую точку, надо покрасить её в тот же цвет, что и самая близкая к ней изначальная точка.

– Да, тогда, наверное, будет меньше всего пестрить в глазах. Хм, а у каких-то точек сразу две ближайшие... Возьму для них простой карандаш!

Потратив полчаса на раскрашивание листа бумаги, Петя получил такую картинку (рисунок справа).

– А вроде бы красиво, надо маме похвастаться! – И Петя понёс рисунок маме.

– Мама, смотри, что я нарисовал!

– Ух ты, разбиение Вороного, здорово!

– Воро... кого?

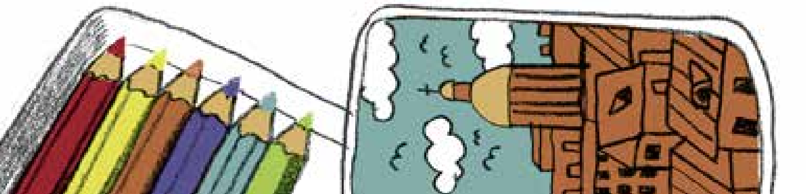
– Был такой замечательный математик, Георгий Феодосьевич Вороной. Он жил во второй половине XIX века, в честь него названы такие же картинки, как у тебя. Они называются *разбиениями* или *диаграммами Вороного*. Долго рисовал?

– Как со школы вернулся.

– Долго! Давай покажу, как это сделать проще. Кстати, ничего удивительного не заметил на картинке?

– У меня вроде получилось, что у частей прямые границы. А почему так?

– Смотри, давай сначала отметим две точки, назовём их $A$ и $B$. Теперь проведём серединный пер-



пендикуляр к отрезку $AB$. Это такая прямая, которая проходит через середину $AB$ и идёт перпендикулярно отрезку. Видишь, он делит весь лист на две части?

– Ага.

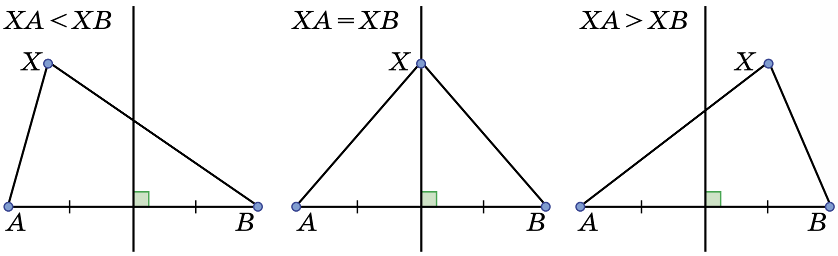
– Если мы возьмём точку $X$ в той же части, что и точка $A$, то отрезок $XA$ будет по длине меньше отрезка $XB$. Если, наоборот, мы возьмём точку $X$ в той же части, что и точка $B$, то тогда отрезок $XA$ будет больше отрезка $XB$.

– А если $X$ лежит на самом перпендикуляре?

– Тогда отрезки $XA$ и $XB$ равны.

– А, я понял, это как раз разбиение Вороного для точек $A$ и $B$, да?

– Именно так!

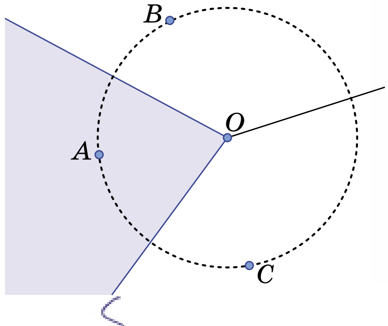


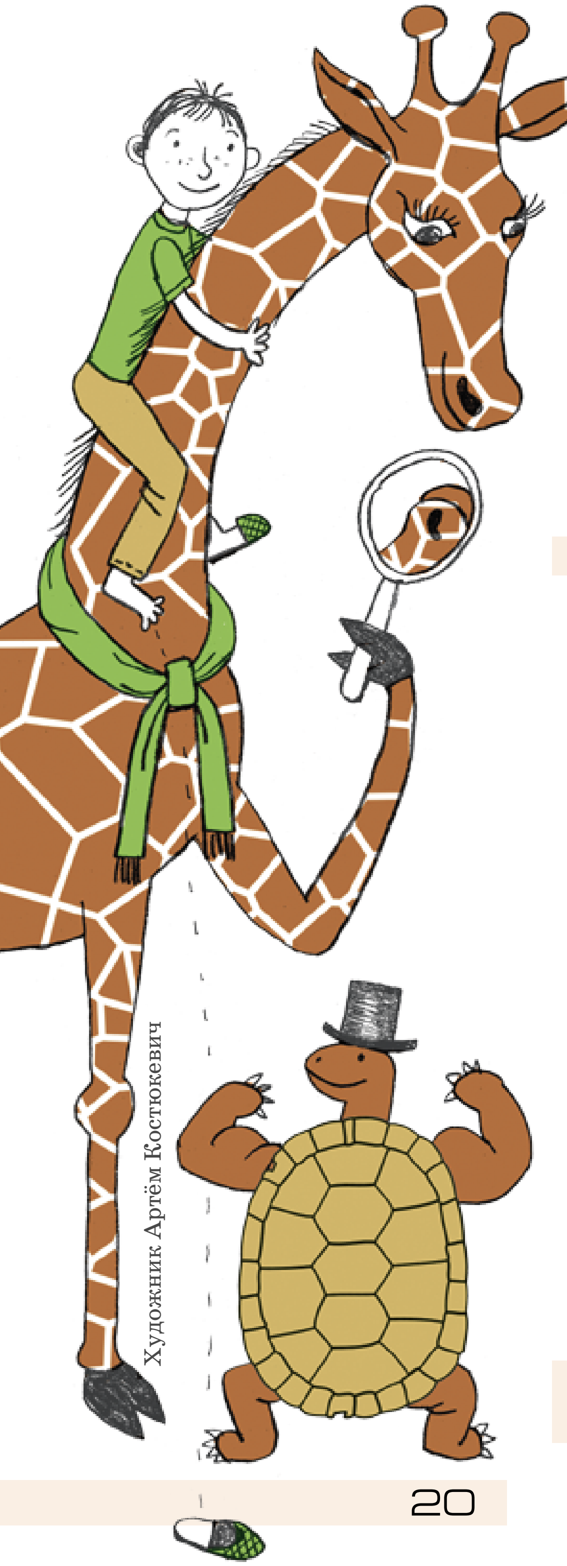

– Теперь попробуем взять три точки $A$, $B$ и $C$. Если мы хотим покрасить точку $X$ в такой же цвет, что и $A$, у нас должны выполняться одновременно неравенства $XA < XB$ и $XA < XC$. Для этого надо пересечь серединные перпендикуляры к $AB$ и $AC$ и взять соответствующую область – это будет часть, содержащая точку $A$. Чтобы получить всё разбиение Вороного, надо провести все три перпендикуляра.

– Ой, у тебя серединные перпендикуляры в одной точке пересеклись, это всегда так?

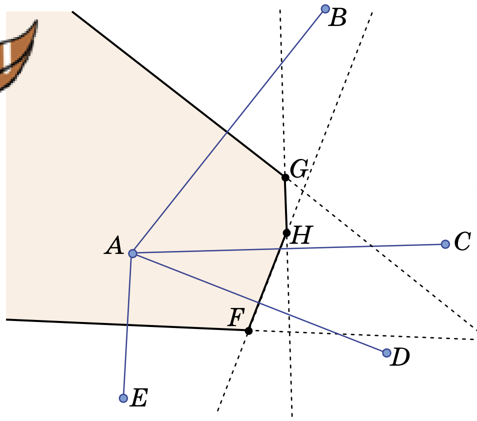
– Да! Про это даже есть теорема в любом школьном учебнике геометрии. А точка пересечения будет ещё и центром окружности, проходящей через все вершины треугольника.

**Теорема.** Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром его описанной окружности.



– Теперь давай возьмём сразу много точек и одну из них назовём $A$. Посмотрим на серединные перпендикуляры тех отрезков, один конец которых совпадает с $A$. Каждый такой перпендикуляр делит плоскость на две половины. Возьмём все половины, содержащие $A$, и пересечём их. Часть с точкой $A$ готова.




– Ух ты, получается прямо моя картинка! И я даже понял, как это доказать.

Докажите, что картинки у Пети и мамы совпадут.

– Интересно, что диаграммы Вороного можно увидеть в неожиданных местах: на панцире черепахи, на коже жирафа, в кронах деревьев и даже на листьях дерева. Как пойдём гулять, обязательно покажу.

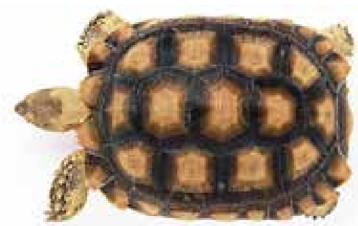


Фото листа: Zbysek.nemec, wikimedia.org

– Здорово! – обрадовался Петя и решил ещё порисовать диаграммы Вороного. Попробуйте и вы (например, по ссылке kvan.tk/voronoi-demo онлайн)!

Подумайте, почему на фотографиях, помещённых выше, появляются диаграммы Вороного.

Художник Артём Костюкевич