Математический кружок

Константин Кноп

Мышки и пробирки

Задача. Представьте, что вы работаете в лаборатории, которая должна запустить испытание на добровольцах новой вакцины. Для этого вы сделали партию из 240 пробирок с вакциной. К сожалению, в одну из пробирок по ошибке вместо вакцины поместили вещество, опасное для человека, причём эта пробирка внешне никак не отличается от остальных.

Вам нужно как можно скорее найти неправильную пробирку и отправить в клинику остальные 239. Для этого можно использовать белых лабораторных мышей: вакцина не окажет на них никакого эффекта, а ошибочное вещество, даже капля его, приведёт всего лишь к тому, что шерсть мышки окрасится в зелёный цвет не позже, чем через сутки. Но у вас только 8 мышек! Как решить эту задачу? Точнее, как это сделать за минимально возможное время?

Идея первая

Как говорили древние, «разделяй и властвуй». Попробуем... Сначала сделаем 8 смесей, капнув в каждую из них по капле из 30 разных пробирок и дав каждую смесь какой-то из мышек. Тогда через 24 часа одна из мышей позеленеет и дальнейшее её участие в тестах станет бессмысленным. Но свою роль она уже сыграла: мы всего за сутки уменьшили число «подозрительных» пробирок с 240 до 30.

Хорошо, будем продолжать. У нас осталось 7 белых мышек. Возьмём из 30 пробирок ещё по капле в 7 новых смесей – в нескольких смесях будут смешаны 4 пробирки, а в остальных по 5. Через 24 часа позеленеет ещё одна мышка, но теперь мы будем точно понимать, что «краситель» находится в какой-то из тех пробирок, которые участвовали в её смеси. То есть под подозрением останутся не более пяти пробирок, а белых мышек ещё шесть. А значит, за третьи сутки мы точно найдём ошибочную пробирку.

Трое суток – прекрасный результат. Но пока неясно, как доказать его оптимальность, а значит, у нас остаётся вопрос: а нельзя ли его улучшить?

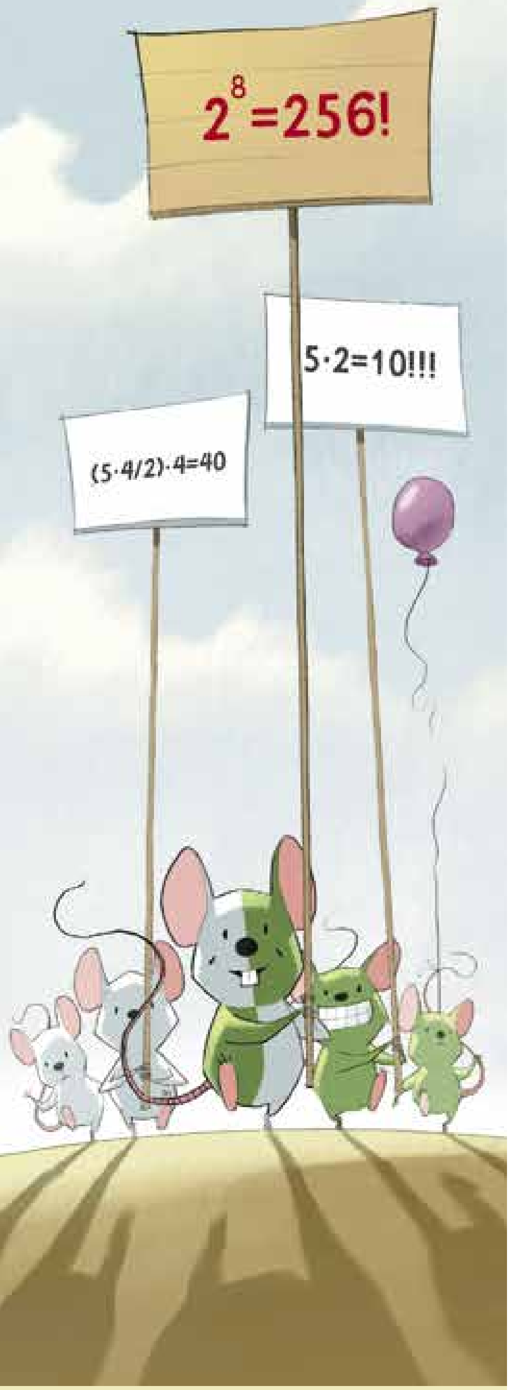
Идея вторая

Когда мышка становится зелёной, она тем самым сообщает нам информацию о том, в каких пробирках может находиться краситель. Но когда мышка остаётся белой, она тоже сообщает нам информацию: мы понимаем, в каких пробирках красителя точно нет. Например, если в первый день ни одна мышка не поменяла цвет, то ни в одной из пробирок, откуда мы капали смеси для мышек, красителя не было. Иначе говоря, мы могли бы сразу же составлять из 240 пробирок не 8 разных смесей, а 9 (по 26 или 27 пробирок в одной смеси). К сожалению, эта прекрасная идея не позволяет уменьшить время определения ошибочной пробирки. Нужны ещё идеи!

Следующая идея – не бояться зелёных мышек. Почему мы делили смеси так, чтобы из каждой пробирки брать только одну каплю и давать её только одной мышке? Видимо, мы не хотели, чтобы за один день сразу много мышек позеленели и стали бесполезными для дальнейших тестов. Но почему бы не позволить себе сделать зелёными, например, двух мышей? Давайте подумаем, а на сколько групп тогда мы могли бы разделить все 240 пробирок? Будем маркировать каждую группу номерами мышек, которым достанется эта группа. Тогда у нас получается такой список групп: $\{\varnothing, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, (1,2), (1,3), \ldots, (7,8)\}$ (символом $\varnothing$ обозначена «пустая» группа). То есть у нас одна группа, которую мы не дадим ни одной мышке, 8 групп, которые достанутся только какой-то одной мышке, и ещё 28 групп, которые достанутся паре мышек – для каждой пары будет своя группа. Итого получается 37 групп, а это значит, что в каждой группе даже после первого дня окажется не более 7 пробирок ($7 \cdot 37 > 240$), и тогда, похоже, пробирку с красителем удастся найти всего за два дня. Ура!

И два дня тоже не минимум!

Если мы хотим уложиться ещё быстрее, чем в два дня (то есть за один день!), мы должны быть согласны перекрасить в этот день хоть всех мышей: на следующий день они нам уже не нужны. И, соответственно, это означает, что мы должны постараться каждой пробирке сопоставить своё, уникальное, подмножество мышек, которые получат по одной капле из этой пробирки. Получится ли у нас это? Давайте сосчитаем количество возможных подмножеств. Проще всего это делать так: каждая мышка либо входит в подможе-



ство, либо нет, то есть её вхождение можно закодировать одним битом – 0 или 1. Всего для 8 мышек получится 8 битов, то есть $2^8=256$ различных подмножеств. Это точно больше, чем 240, значит, мы укладываемся!

Давайте опишем, как это выглядит «с точки зрения мышек». Мы кодируем пробирки двоичными числами. За каждой мышкой закреплён свой двоичный разряд, и если в этом разряде у данной пробирки стоит 1, то капля из этой пробирки мышке достаётся, а если 0 – то нет. В итоге, поскольку ошибочна ровно одна пробирка, позеленеют ровно те мышки, которые получили каплю из неё, и по подмножеству зелёных мышек мы однозначно восстановим «кодировку» пробирки с красителем.

Другая задача

Как быть, если пробирок по-прежнему 240, но мышек не 8, а всего 5?

Поскольку $2^5=32$, уложиться в один день не выйдет. А в два дня сможем?

Да. Приведём два немножко разных описания этого.

Сначала сделаем смеси для первого дня. Начнём с одной пробирки, из которой по капле получат все 5 мышек. Добавим $5\cdot2=10$ пробирок, из которых вольём по капле четырём мышкам (каждая из пяти четвёрок получает капли из своей пары пробирок). Затем добавим ещё $(5\cdot4/2)\cdot4=40$ пробирок, из которых по капле получат все тройки мышек – каждой тройке соответствуют 4 пробирки. Продолжим: $(5\cdot4\cdot3/6)\cdot8=$ $=80$ пробирок для пар мышек, $(5\cdot4\cdot3\cdot2/24)\cdot16=80$ для «одиночек» и, наконец, 32 пробирки ещё можно оставить нетронутыми. Всего удаётся «обслужить» $1+10+40+80+80+32=243$ пробирки.

Всем накапали, ждём.

Через сутки смотрим, сколько мышек не изменило свой цвет. Группа из k зелёных мышек однозначно определяет 2^{5-k} пробирок, из которых капали именно этой группе. А дальше у нас есть $5-k$ оставшихся мышей и 2^{5-k} подозрительных пробирок – то есть перед нами стоит ровно та задача, которую мы выше научились решать за один день!

Вроде всё, только вот описание кажется очень сложным. Нельзя ли объяснить проще? В этой задаче, в отличие от первой, для каждой мышки и каждой пробирки есть не две, а три возможности:

0) мышка не получает каплю из этой пробирки ни в первый, ни во второй день;
1) мышка получает каплю из пробирки в первый день;
2) мышка получает каплю из пробирки во второй день.

Почему нет варианта «мышка получает каплю из пробирки и в первый, и во второй день»? Потому что если пробирка окажется ошибочной, то во второй день мышка уже изначально будет зелёной. Иначе говоря, во второй день мы можем располагать только теми мышками, которые не получали каплю из этой пробирки в первый день.

Итак, три возможности для одной мышки – а сколько тогда возможностей для пяти мышек? Ясно, что их $3^5 = 243$. Ура, мы нашли очень естественную и понятную «кодировку» и для этой задачи – это троичная система счисления. Как и в предыдущей задаче, троичная запись позволяет для каждой пробирки однозначно выяснить, каким именно мышкам нужно налить каплю в первый, а каким – во второй день, и кодировки всех пробирок разные, то есть по результату (часть мышек позеленела после первого дня, часть – после второго, остальные остались белыми после двух дней) мы сможем выяснить кодировку единственной ошибочной пробирки.

А дальше?

Разумеется, наибольшее число пробирок, для которого задачу удаётся решить за N дней, может быть вычислено с помощью записи чисел в $(N+1)$-ичной системе, где число разрядов равно числу мышек.

А как ещё можно обобщить эти задачи?

1. Что, если краситель мог оказаться не ровно в одной, а, например, «не более чем в двух пробирках»?

2 (автор – Сергей Грибок). Что, если какая-то мышка (или «не более чем одна мышка») может позеленеть не только от красителя, но и по естественным причинам – например, от зависти? Исследовать причину нам некогда, так что приходится придумывать полностью новое решение – такое, в котором учитывается возможность естественной смены окраски.

Обе эти версии очень непросты. Если вы считаете, что умеете их правильно решать и доказывать оптимальность полученного результата, – обязательно отправьте своё решение в редакцию «Квантика»!

Художник Алексей Вайнер