

В статье из «Квантика» № 7 за 2022 год мы научились рисовать четырёхмерный кубик. Может, теперь его сделать? Из подручных материалов.

Совсем сделать, конечно, не получится. Ведь у нас всё-таки нет здесь четырёхмерного пространства, в котором такой кубик можно было бы хранить. Но зато можно сделать выкройку – развёртку – и подождать, когда кто-нибудь четырёхмерный её сложит в куб.

Действительно, когда мы делаем трёхмерный бумажный кубик, мы сначала рисуем на бумаге плоскую развёртку из шести квадратов – например, латинский крест (рис. 1). И эта развёртка, заметьте, двумерная! Её могли бы сделать и плоские человечки, живущие на листе бумаги. Потом мы её сворачиваем в куб, а вот это плоские человечки уже не могут: мы используем наше третье измерение.

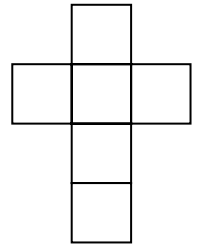


Рис. 1

Трёхмерный куб мы собирали из двумерных граней. А из чего же собирать четырёхмерный? Из трёхмерных кубиков, конечно! В прошлый раз мы выяснили, что их понадобится 8 штук – столько, сколько 3-граней у 4-куба. И склеивать их нужно будет уже не рёбрами, как кубик, а гранями – ведь у двух соседних 3-граней есть общая двумерная (квадратная) грань. Всё, что можно, склеим у себя в трёхмерном пространстве, а остальное они уж там в своём четырёхмерном сложат.

Выкройки, как и для двумерного кубика, могут быть разные. Проще всего сделать «обобщение» латинского креста: ведь мы знаем, что в четырёхмерном кубе все двумерные грани должны соединять какие-то две 3-грани, «свободных» двумерных граней не должно оставаться; так же, как в трёхмерном кубе не болтаются ни к чему не приклеенные рёбра. Итак, берём 8 кубиков и склеиваем их – и вуаля! Развёртка готова (рис. 2).

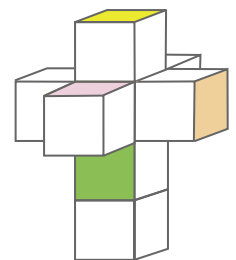


Рис. 2

Теперь нужно разобраться, как наша выкройка будет потом, в четырёхмерье, складываться. Тут придётся потренировать наше почти уже 4-мерное воображение!

**Задача 1.** Найдите на развёртке (рис. 2) те двумерные грани, которые при сборке 4-куба склеиваются с раскрашенными гранями.

**Задача 2.** Считая, например, что синий куб на рисунке 3 – это «центральный» кубик развёртки (тот, который нам из нашего трёхмерного пространства совсем не виден за остальными), найдите на рисунке 3 все остальные кубики развёртки. Например, какому элементу развёртки соответствуют кубы, покрашенные на рисунке 4?

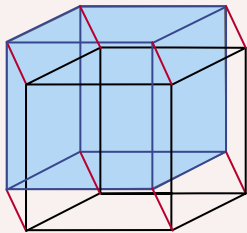


Рис. 3

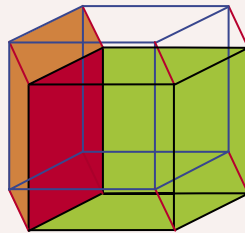


Рис. 4

Заметьте, что мы не можем разглядеть один из кубиков нашей развёртки ни с какой стороны – он полностью закрыт соседями. Так же и плоские человечки, когда смотрят на латинский крест, не видят центрального квадрата. Но можно сделать такую развёртку, чтобы им были видны все квадраты. Так же и мы – если захотим, можем переклеить одну из будущих 3-граней так, чтобы в новой развёртке нам были видны все кубики.

**Задача 3.** Предложите такую развёртку 4-куба, у которой видны все 3-грани. Сможете ли вы придумать (нарисовать или сделать) такую развёртку 4-куба, в которой каждый кубик-3-грань соединён не более чем с двумя другими?

Из каждой развёртки обычного 3-куба можно получить много развёрток 4-куба: достаточно к каждому её квадрату приклеить кубик, получив похожий на латинский крест «плоский слой» (высотой в один кубик), потом к этому плоскому слою приклеить ещё два кубика: один с одной стороны (к любому кубику слоя!), второй – с другой (тоже к любому кубику).





Так, например, получается развёртка на рисунке 2. Но бывают и такие развёртки 4-куба, которые из развёрток 3-куба не получишь.

**Задача 4.** Придумайте такую развёртку единичного 4-куба, которая помещается в коробку  $4 \times 4 \times 2$ .

**Задача 5.** Раз уж вы так здорово освоились с четырёхмерьем, то наверняка сможете нарисовать все 11 разных развёрток обычного, трёхмерного куба. Развёртки, отличающиеся поворотом или отражением, разными не считаются.

Теперь, когда вы умеете рисовать и даже почти изготавливать четырёхмерные кубики, вы, конечно, понимаете, что можно рисовать и пятимерные, и шестимерные... А вдруг на самом деле мы живём в каком-нибудь таком «пространстве большей размерности», пяти- или там десятимерном? Так плоские человечки или одномерные червяки могли бы жить у нас в трёхмерии, сами того не замечая и ничего не видя снаружи от своей плоскости... Мы живём, а пятимерные существа иногда подходят и смотрят «оттуда» на наш трёхмерный мир? Что ж, такое не исключено...

А что, если в одном четырёхмерном пространстве находятся сразу два трёхмерных мира (говорят: подпространства)? Могут они там поместиться? А может быть, жителям этих миров можно как-нибудь переходить из одного в другой? Или хотя бы что-нибудь передавать?.. Подумайте: каким может быть такой «портал», соединяющий миры?

*(Подсказка. Прежде чем придумывать про 4-мерье, можно «упростить задачу на одно измерение» и посмотреть, как это устроено в нашем трёхмерном пространстве. Какие пространства и как в него могут «помещаться»?)*

И ещё. Двумерным человечкам не обязательно жить на плоскости. Они могут жить и на какой-нибудь изогнутой поверхности, например на сфере – на оболочке большого шара... Нам, смотрящим на них снаружи, это было бы хорошо видно. А как они могли бы догадаться об этом сами? Может, и наше трёхмерное пространство – какое-нибудь кривое? Как мы могли бы это проверить?