НАШ КОНКУРС, X тур («Квантик» № 6, 2022)

46. *Два посёлка Телегино и Санкино разделены широкой рекой. В Телегино есть магазин, в который зимой ходят жители обоих посёлков, а летом, когда река оттаивает, – только телегинцы. Летом телегинцы стали тратить в магазине в 3 раза больше, чем зимой, но суммарная выручка магазина сократилась в 3 раза. Кто тратил зимой в магазине больше и во сколько раз – телегинцы или санкинцы?*

Ответ: санкинцы, в 8 раз. Телегинцы зимой тратили втрое меньше, чем летом, а значит, зимой выручка магазина девятикратно превосходила их траты. Восемь из этих девяти частей выручки магазин получал от санкинцев. Следовательно, санкинцы тратили зимой в 8 раз больше телегинцев.

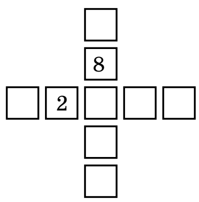
47. *Даны 9 квадратных карточек с числами 1, 2, ..., 9, одинаковые с обратной стороны. Костя выложил их в виде креста, обратной стороной вверх, и сказал Квантику только, что в строке креста числа идут по возрастанию или по убыванию, и в столбце – тоже по возрастанию или по убыванию. За ход Квантик указывает на любую из карточек, а Костя отвечает, какое там число.*

а) За какое наименьшее число ходов можно узнать, где лежит карточка 5?

б) Могло ли так случиться, что Квантик задал Косте всего два вопроса и по ответам понял про все 9 карточек, где какая лежит?

а) Ответ: за 0 вопросов. Число, стоящее в центре, больше четырёх из оставшихся (двух в строке и двух в столбце) и, аналогично, меньше четырёх из оставшихся. Поскольку чисел всего 9, получаем, что в центре всегда стоит 5.

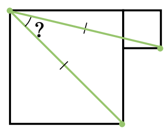
б) Ответ: да. Пусть за два вопроса Квантик узнал, что числа 2 и 8 стоят как на рисунке. Поскольку по центру стоит 5, то слева от 2 может стоять только 1 (и числа в строке идут по возрастанию слева направо), а сверху от 8 – только 9 (и числа в столбце сверху вниз идут по убыванию). Тогда в столбце лежат карточки 9, 8, 5, 4, 3, а в строке – 1, 2, 5, 6, 7.



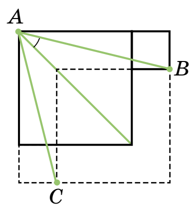
48. *В ряд стоят 36 человек, среди которых 15 лжецов (всегда лгут), а остальные рыцари (всегда говорят правду). У всех, начиная со второго, спросили про каждого из предыдущих, лжец ли он. (Например, пятому задали четыре вопроса: про первого, второго, третьего и четвёртого.) Докажите, что ответов «Да» и «Нет» было поровну.*

Поменяем стоящих рядом рыцаря и лжеца местами. Ответы тех, кто стоит в ряду до них, не изменятся; у тех, кто стоит после них, только поменяются местами «Да» и «Нет», относящиеся к этим рыцарю и лжецу. Что же до самих поменявшихся местами – обо всех предыдущих они скажут то же, что и раньше, а тот из них, кто стоит дальше, про другого всегда скажет «Да». Значит, число ответов при такой перестановке не изменится, и можно собрать всех рыцарей в конце очереди, а лжецов в начале. Всего было произнесено $(35 \cdot 36):2 = 630$ ответов, а «Да» отвечали только рыцари про лжецов $21 \cdot 15 = 315$ раз. Это ровно половина ответов, значит, «Да» и «Нет» было поровну.

49. *Вершины двух квадратов соединили двумя отрезками, как на рисунке. Оказалось, что эти отрезки равны. Найдите угол между ними.*

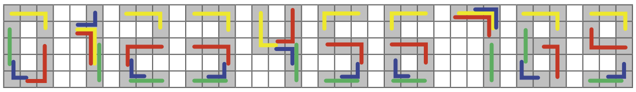


Ответ: 30°. Отразим рисунок симметрично относительно отмеченной диагонали большого квадрата. В силу симметрии $AB = AC$, и искомый угол в два раза меньше угла BAC; продлим стороны маленьких квадратов за точки B и C и построим квадрат с диагональю BC. Его сторона равна стороне исходного большого квадрата, то есть эти квадраты равны, и отрезок AB, равный диагонали исходного квадрата, равен и диагонали построенного, то есть $AB = BC$. Тогда треугольник ABC – равносторонний, угол BAC равен 60°, а искомый угол – его половина – составляет 30°.



50. *Федя вырезал из бумаги несколько клетчатых фигурок. Он заметил, что может сложить все свои фигурки (возможно, с наложением) так, чтобы получилась цифра 0. Аналогично все фигурки можно сложить так, чтобы получалась любая другая цифра (изображения цифр приведены на рисунке). Какое наименьшее число фигурок мог вырезать Федя?*

Ответ: 4. Если в фигурке 5 или больше клеток, то, поскольку она помещается в цифру 1, в ней есть по крайней мере 4 идущие в ряд клетки, но такая фигурка не поместится в цифру 2 – противоречие. Значит, в каждой фигурке Феди не больше 4 клеток. Цифра 8 состоит из 13 клеток, следовательно, у Феди не меньше 4 фигурок. Например, можно взять две четырёхклеточные буквы «Г», уголок из 3 клеток и прямую фигурку из 3 клеток: на рисунке ниже показано, как сложить каждую из цифр (каждой фигурке Феди соответствует линия своего цвета).



СНОВА О ЛУНОЧКАХ («Квантик» № 7, 2022)

1. Расположим головастиков на треугольной сетке (рис. 1). Заметим, что один головастик из другого получается перекладыванием одинаковых сегментов круга.

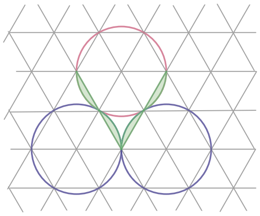


Рис. 1

2. Нарисуем равносторонний треугольник и его вписанную и описанную окружности на треугольной сетке (рис. 2). Видно, что радиус вписанной окружности в 2 раза меньше, чем радиус описанной. Вспомнив формулу площади круга $S=\pi r^2$, получаем, что если площадь вписанного круга равна x, то площадь описанного равна $4x$. Тогда площадь кольца между окружностями равна $4x-x=3x$. Если закрашенную часть повернуть на 120°, а затем ещё на столько же, то получим, что три копии закрашенной части составляют это кольцо. А значит, площадь каждой из них равна $3x/3=x$, то есть равна площади вписанного круга.

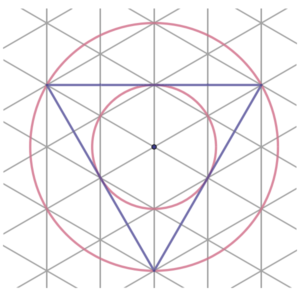


Рис. 2

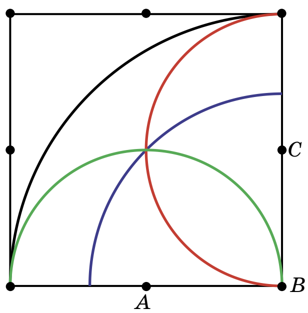


Рис. 3

3. Для удобства будем считать, что длина стороны квадрата равна 2. Посчитаем площадь этого сектора. Он составляет четверть круга радиуса 2, а значит, его площадь равна $\frac{1}{4}\pi 2^2=\pi$. Три искомые дуги проведены на рисунке 3 разными цветами. Красная и зелёная отрезают по $\frac{1}{2}$ круга радиуса $AB=1$, то есть по $\frac{1}{2}\ \pi 1^2=\frac{1}{2}\pi$. Синяя отрезает $\frac{1}{4}$ круга радиуса $AC=\sqrt{2}$, то есть $\frac{1}{4}\pi(\sqrt{2})^2=\frac{1}{2}\pi$.

4. Проведём окружности, как на рисунке 4. Они пересекаются в точках C и E, симметричных относительно AB. Если повторить те же действия, но с другой стороны, то построим точку F. Таким образом, имея вершины квадрата $ABCD$, можно построить вершины квадрата $ABEF$, который симметричен ему относительно стороны AB. Отражая таким образом квадраты, можем построить сколь угодно большой фрагмент квадратной решётки.

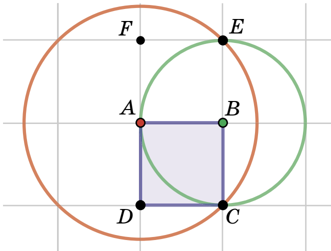


Рис. 4

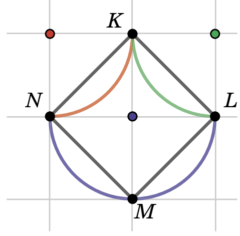


Рис. 5

а) Рассмотрим узлы K, L, M, N этой решётки (рис. 5). $KLMN$ – квадрат площади 2. Проведя дуги, как на рисунке, получим криволинейную фигуру $KLMN$ той же площади.

б) Идея этого решения такая же – возьмём сначала прямоугольник $PQRS$ с размерами $1\times n$, его площадь равна n. Мы хотим заменить его стороны на дуги так, чтобы его площадь осталась прежней. Проведём окружности с центрами в P и Q с радиусом x, пусть одна из точек пересечения – T (см. на рисунке 6 пример для $n=3$). Теперь проведём с центром в T окружность того же радиуса x. Она пройдёт через P и Q, и чем больше x, тем эта дуга будет больше «похожей на отрезок». Так же сделаем с противоположной стороной SR, с тем же радиусом x; а затем проделаем то же с другой парой сторон. Величину x надо выбрать достаточно большой, чтобы эти дуги не пересекались внутри прямоугольника. Получим криволинейную фигуру $PQRS$, площадь которой такая же, как у прямоугольника $PQRS$, то есть n.

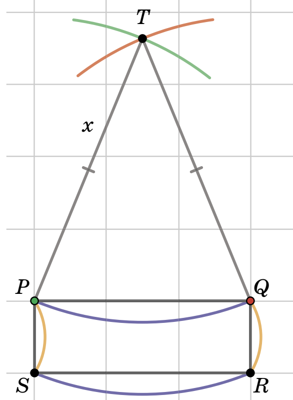


Рис. 6

ПОЛИНЕЗИЙСКОЕ КАНОЭ

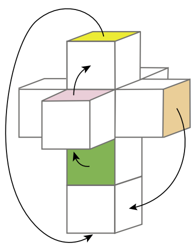
(«Квантик» № 7, 2022)

К лодке прикреплён *балансир*. Полинезия – это множество островов, разделённых водами Тихого океана, поэтому островитянам нужны были лодки, способные устоять при встрече с большими волнами. Парус позволяет лодке плыть быстрее, но зато ветер может легко опрокинуть её. Балансир, прикреплённый на длинных шестах со стороны, откуда дует ветер, действует как противовес (каноэ симметрично, нос и корма легко меняются местами). Конечно, в сильный шторм и такая лодка может перевернуться, но полинезийцы – опытные мореходы и в опасную погоду рисковать не станут.

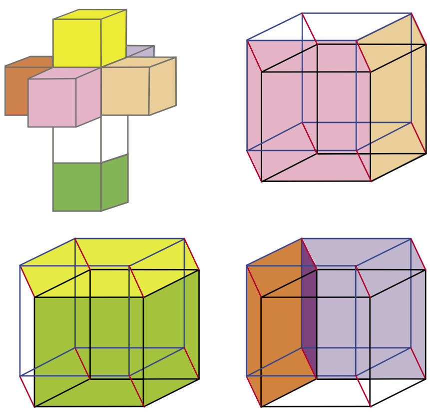
Балансиром могли служить и простое бревно, и деревянная часть, похожая по форме на лодку. Развитием этой идеи стали фиджийские катамараны – две одинаковые лодки, соединённые настилом, выдерживающим и людей, и грузы.

ЧЕТЫРЁХМЕРНЫЙ КУБИК: РАЗВЁРТКА

1.

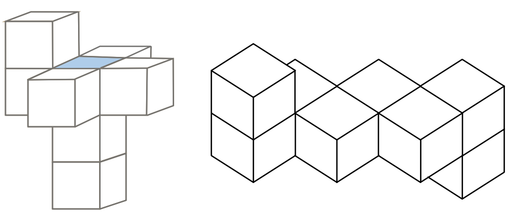


2.

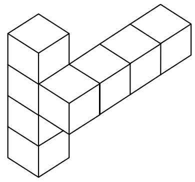


А где белый кубик?

3. Например, так:



4. Например, можно последовательно переклеить все боковые кубики «латинского креста» друг на друга – оранжевый кубик на рисунке к задаче 2 отклеить от центрального и приклеить к розовому, розовый – к бежевому, бежевый – к фиолетовому. Получится так, как на рисунке.



ЭТЮД РЕТИ

Если бы белый король мог сразу войти в красный квадрат (рис. 1), он успел бы съесть чёрную пешку до того, как она станет ферзём. Но до границы красного квадрата ещё два хода.

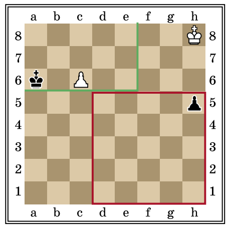


Рис. 1

А сразу войдя в зелёный прямоугольник, он успел бы защитить белую пешку. И снова не хватает двух ходов!

И всё же белые могут добиться ничьей, «погнавшись за обоими зайцами» – белый король идёт на поле g7, приближаясь к *обеим* пешкам!

Дальше надо разбирать случаи, но все они похожи. Вот самый интересный: после двух ходов белых и чёрных получилась позиция, как на рисунке 2. Кажется, стало только хуже: чёрные могут съесть белую пешку следующим же ходом, а белый король всё ещё не успевает догнать чёрную пешку... Не унываем, а снова сдвигаем короля влево-вниз! Если белую пешку съедят – белый король войдёт в красный квадрат и догонит чёрную, иначе – защитит белую. Так или иначе, итог – ничья.

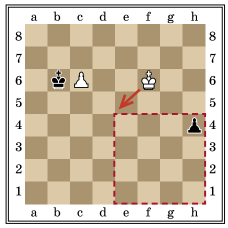


Рис. 2

МЕТАМОРФОЗЫ БУКВ И СЛОВ

Куда подевался Пифагор? Имя Пифагора по старой орфографии писалось через фиту (θ) – Пиθагоръ, вслед за греческим написанием через тету – Πυθαγόρας, и статья о Пифагоре шла в словаре позже. Во многих западноевропейских языках греческая θ перешла в th (например, англ. Pythagoras).

Двойной дубль. Когда-то *U* и *V* были разными вариантами начертания одной буквы. Букву *V* удобнее высекать на камне, поэтому в древнеримских надписях обычно встречается *V*. Примерно с X века начертание *V* стало использоваться в качестве первоначальной прописной буквы, а начертание *U* встречалось в основном в середине слова. До XV века строчные *u* и *v* использовались вперемешку. Название буквы *w* — напоминание о тех временах, когда буквы *u* и *v* не различались.

«Бэ», а не «ви». Эразм нашёл в тексте место, где эти буквы передают блеяние баранов: спускаясь с горы, они говорили «βηη–βηη». Бараны, в отличие от людей, не изменили за прошедшие столетия своего «произношения» и во времена Гесиода так же, как и сейчас, издавали звуки «бээ-бээ», но никак не «вии-вии».

Новогреческий язык, потеряв соответствие β = б, использует для звука [б] сочетание μπ: μπαλέτο – «балет», μπάνιο – «баня» и т. д.

Странный крик. Так привлекали клиентов носильщики. В переводе с греческого μεταφορά – «перевозка, доставка», «транспортировка», а также «метафора» (слова в переносном значении). Отсюда и μεταφορέας – «носильщик» (а также «транспортёр»), μεταφορικός – «транспортный», μεταφορικη σημασία означает «в переносном смысле».

СЛОВА ИДОЛОВ

– (...) Либо ты Говорящий Правду, а левый – отвечает случайно, либо ты Лжец, а левый – *всё равно* отвечает случайно, либо ты сам отвечаешь случайно. В любом случае, твой ответ доказывает, что правый не может отвечать случайно, так что мой вопрос к нему: верно ли, что $1+1=2$?

– **Да**, – немедленно ответил правый идол с уверенностью камня, брошенного в озеро.

– Значит, правый идол – это Говорящий Правду, и я могу использовать его как оракула для определения сущности остальных двух. Так что мой следующий вопрос к правому идолу: центральный идол – это Отвечающий Случайно?

– **Да**, – сказал идол – ещё один камень.

– Тогда я всё знаю! Левый идол – Лжец, центральный – Отвечающий Случайно, а правый идол – это Говорящий Правду. Я прав?

– **Не ищи больше знаний!** – ответили идолы хором, потряся храм до основания. – **Изыди!**

ТАК СКОЛЬКО ЖЕ ЛЕТ СПУСТЯ?

Ответ: семь. Вот как пишет об этом Владимир Марамзин, подготовивший первое собрание сочинений Иосифа Бродского: «Нужен редактор и автору. (...) В другом случае он согласился со мной и поменял название стихотворения “Семь лет спустя” на “Шесть лет спустя” (...) – несложная арифметическая выкладка покажет, что такое событие происходит через шесть, а не через семь лет, из-за високосного года, неизбежно падающего на этот период» (из книги «История одного политического преступления»).

Дополнительная задача: правда ли, что 2 января выпадает на вторник ровно раз в 6 лет? Если нет, то какие ещё интервалы возможны?

ЗАГАДКИ КНОПОЧНОЙ NOKIA

В квадрате $N\times N$ мы проходим последовательно по каждому столбцу (по циклу: после последнего столбца попадаем в первый) и по каждой строке (тоже по циклу). То есть за N ходов по горизонтали и N ходов по вертикали мы вернёмся в исходную точку, пройдя по $2N$ числам.

Чтобы разобраться с суммой, представим себе не один, а два квадрата $N\times N$ из чисел. В левом в каждой строке стоят числа от 1 до N. А в правом – в первой строке все числа 0, во второй строке все числа N, в третьей – числа $2N$ и т. д.

$$\begin{matrix} 1 & 2 & \cdots & N \\ 1 & 2 & \cdots & N \\ 1 & 2 & \cdots & N \\ \cdots & & & \cdots \\ 1 & 2 & \cdots & N \end{matrix} \;+\; \begin{matrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ N & N & \cdots & N \\ 2N & 2N & \cdots & 2N \\ \cdots & & & \cdots \\ (N-1)N & (N-1)N & \cdots & (N-1)N \end{matrix} \;=\; \begin{matrix} 1 & 2 & \cdots & N \\ N+1 & N+2 & \cdots & 2N \\ 2N+1 & 2N+2 & \cdots & 3N \\ \cdots & & & \cdots \\ & & \cdots & N^2 \end{matrix}$$

Число в каждой клетке исходного квадрата – сумма стоящих на тех же позициях чисел в левом и правом квадратах (действительно, в первой строке как раз получатся последовательные числа от 1 до N, во второй от $N+1$ до $2N$ и т. д.).

Поэтому, чтобы найти сумму чисел в цепи в исходном квадрате, можно найти суммы чисел в такой же цепи в наших новых левом и правом квадратах и эти две суммы сложить.

Но в новых квадратах это совсем легко! Каждая цепочка ровно дважды бывает в каждом столбце, поэтому в левом квадрате мы складываем все числа от 1 до N по два раза – получается $N(N+1)=N^2+N$. Каждая цепочка ровно дважды бывает в каждой строке, поэтому в правом квадрате мы складываем все числа 0, N, $2N$, ... $(N-1)N$ два раза – получается $N^2(N-1)=N^3-N^2$.

Итого получаем сумму N^3+N (и, например, для $N=3$ действительно получается $3^3+3=30$).

ПОПРАВКА К «НАШЕМУ КОНКУРСУ»

В задаче 44 («Квантик» № 5) подразумевалось, что размеры раковин не совпадают не только сначала, но вообще в любой момент времени. Решение («Квантик» № 7) дано именно для этого случая. Если же раки могут находить раковины уже встречавшихся размеров, ответ меняется на противоположный (проверьте!).