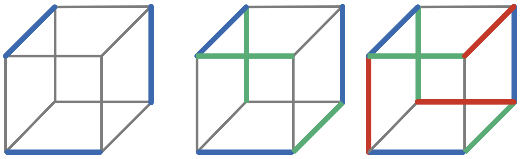
НАШ КОНКУРС, XII ТУР

(«Квантик» № 8, 2022)

56. *Можно ли раскрасить каждое ребро куба в один из четырёх цветов так, чтобы все рёбра каждой грани были разного цвета?*

Ответ: да. Покрасим в один и тот же цвет три ребра, никакие два из которых не лежат в одной плоскости (рисунок слева). Поворачивая эту конфигурацию так, чтобы она захватывала только ещё неокрашенные рёбра, и раскрашивая их в очередной цвет, получим в итоге искомый пример.



57. *Непоседливый кладовщик всю неделю переставлял товары по-разному: по алфавиту названий от А до Я и от Я до А, по возрастанию и по убыванию массы, по возрастанию и по убыванию суммы измерений, по возрастанию даты поступления, и каждый раз расположение товаров отличалось от предыдущих. Какое наименьшее количество товаров у него могло быть?*

Ответ: 4. Трёх товаров не могло быть, потому что их можно упорядочить только шестью способами, а в неделе 7 дней. А четырёх товаров хватит. Например, если обозначить товары цифрами от 1 до 4, в течение недели они могут быть разложены в порядках 1234, 4321, 1243, 3421, 1324, 4231, 1342.

58. *У Яны день рождения в январе, а у Ани – в апреле. В* 2018 *году дни рождения девочек пришлись на вторники. В каком году у обеих девочек день рождения будет во вторник в следующий раз?*

Ответ: в 2029. В обычном году 365 дней, то есть 52 недели и 1 «лишний» день, а в високосном году таких «лишних» дней два. Дополнительный день високосного года добавляется в конце февраля – между январём и апрелем. Поэтому у дня рождения Яны скачок в два дня недели будет случаться между високосным годом и следующим за ним, а у дня рождения Ани – между високосным годом и предыдущим (так, в 2019 году оба дня рождения будут средами, а в 2020 – четвергом и пятницей). Заполняя по такому правилу таблицу по годам, видим, что впервые оба дня рождения снова выпадут на вторник в 2029 году:

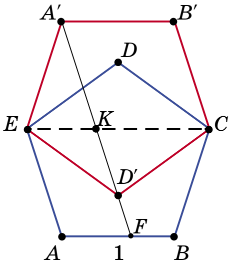
	2019	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026	2027	2028	2029
Яна	ср	чт	сб	вс	пн	вт	чт	пт	сб	вс	вт
Аня	ср	пт	сб	вс	пн	ср	чт	пт	сб	пн	вт

59. *На фуршете встретились* 10 *минераловедов. Каждый принёс с собой коллекцию минералов, причём все камни на фуршете оказались разных размеров. За время фуршета каждые два гостя один раз побеседовали друг с другом наедине, обменявшись при этом самыми маленькими камнями, которые у них были на руках в тот момент. Могло ли оказаться, что всего в обменах участвовало:*

а) менее 10 *камней; б) хотя бы* 60 *камней?*

Ответ: а) нет; б) нет. Будем называть малышами те камни, которые в какой-то момент фуршета были самыми маленькими в чьей-нибудь коллекции. Все камни, участвовавшие в обменах, – малыши. До начала фуршета малышей было 10, и каждый из них участвовал по крайней мере в первом для своего первого владельца обмене. Далее при каждом обмене добавляется не более одного нового малыша: меньший из двух становится наименьшим в своей новой коллекции. Всего обменов $10 \cdot 9/2 = 45$. Итого малышей не более 55.

60. *Два одинаковых правильных пятиугольника симметричны относительно пунктирной диагонали (см. рисунок). Найдите длину* $A'F$, *если стороны пятиугольников все равны* 1.



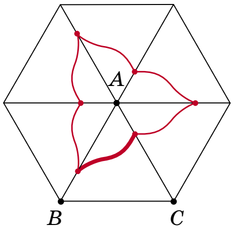
Ответ: 2. Пусть K – точка пересечения $A'F$ и EC. Заметим, что правильный пятиугольник симметричен, и поэтому любая диагональ в нём параллельна «противоположной» стороне. Отсюда следует, что $A'B' \parallel EC \parallel AB$, а также $A'D' \parallel B'C$ (и значит, $A'B'CK$ – параллелограмм). Кроме того, поскольку стороны красного и синего пятиугольников равны, равны и их диагонали, то есть $AE = CB'$ и $AC = EB'$, откуда $AEB'C$ – параллелограмм. Таким образом, $A'K \parallel B'C \parallel AE$, то есть $AEKF$ – также параллелограмм! Но тогда $A'K = B'C = AE = KF = 1$, а значит, $A'F = 2$.

Замечание. Можно также доказать, что точки A, D' и C лежат на одной прямой.

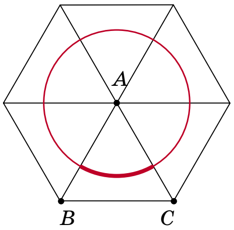
ДИДОНА И ТРЕУГОЛЬНИК

(«Квантик» № 9, 2022)

Для определённости пусть нам дан треугольник ABC площади 1. Может показаться, что ответ – высота этого треугольника или же отрезок, параллельный его основанию. Верный ответ – дуга окружности с центром в вершине треугольника. В самом деле, концы искомой линии лежат на каких-то сторонах треугольника, пусть на AB и AC (первый случай). Отразим треугольник 6 раз относительно вершины A, получится шестиугольник площади 6.



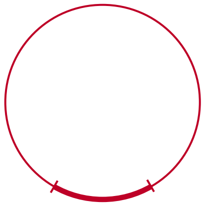
Линия тоже отразится и превратится в замкнутую кривую (так как поворотов было чётное число), вырезающую из шестиугольника фигуру площади 3. Эта кривая имеет наименьшую возможную длину из всех кривых, охватывающих площадь 3 (подумайте, почему). По задаче Дидоны, это окружность, а искомая линия – её дуга, одна шестая часть по длине!



Строго говоря, надо разобрать ещё два случая (второй и третий) – когда оба конца линии выходят на одну и ту же сторону или когда линия вообще не выходит на границу, то есть это замкнутая кривая внутри треугольника.

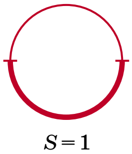
Во втором случае отразим треугольник один раз – получится замкнутая линия наименьшей длины, окружающая площадь 1. В третьем случае у нас сразу есть замкнутая линия наименьшей длины, окружающая площадь $\frac{1}{2}$. По задаче Дидоны, обе эти линии – окружности.

Итак, всего у нас есть три круга: площади 3, площади 1 и площади $\frac{1}{2}$, и надо сравнить три длины: одну шестую часть окружности первого круга, половину окружности второго и всю окружность третьего.

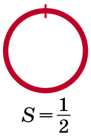


$S = 3$

Сделаем такое наблюдение: если увеличить радиус круга в какое-то число раз, то длина его окружности возрастёт в то же самое число раз, а площадь – в большее число раз (в квадрат числа раз).



$S = 1$



$S = \frac{1}{2}$

Но второй круг получается из третьего увеличением площади в 2 раза. По предыдущему наблюдению, длина окружности возрастёт при этом *меньше*, чем в 2 раза. То есть половина длины второго круга меньше длины третьего, и она выгоднее. Аналогично, первый круг получается из второго увеличением площади в 3 раза, а значит, длина окружности возрастёт меньше, чем в 3 раза. Поэтому шестая часть окружности первого круга меньше половины длины второго. Итого, первый случай и даёт минимум.

■ ЧТО ЭТО БЕЛЕНЬКОЕ ТАМ ЧЕРНЕЕТСЯ?

Задача 4. а) Плоды лотоса (многоорешки) сначала плавают по поверхности воды, а затем тонут и высвобождают семена.

б) Плоды (сухие костянки) чилима, или водяного ореха тоже сначала плавают, а затем тонут и «заякориваются» на дне.

в) Плоды (семянки) череды «ездят» на животных, цепляясь за шерсть.

г) Коробочки мака разбрасывают семена как баллисты, когда сухой стебель качается на ветру или его задевает проходящее животное.

д) Семена кедровой сосны растаскивают в свои кладовые животные, прежде всего кедровка и бурундук. Часть кладовых они теряют, кроме того, роняют некоторые семена по дороге.

е) Слева – прицветные чешуи, никаких семян в них нет. А справа – односемянные плоды, орехи с крылышками. Распространяются они, конечно, ветром.

■ СТОРОНЫ СВЕТА НА НЕБЕ

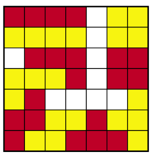
Карта земли – это вид сверху, а карта неба – вид снизу. Поэтому порядок сторон света разный. Представьте, что вы стоите лицом на север и начертили на земле направления на стороны света. Запрокиньте голову вверх: восток остался справа, запад – слева, а север и юг поменялись местами.

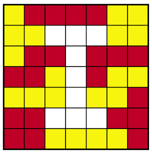
■ СЕРЕДИНКА НА ПОЛОВИНКЕ

Полумастер – подмастерье, помощник мастера и будущий мастер; *полуполковник* – подполковник. *Полднище* – это расстояние, которое можно преодолеть за полдня. Но если вы предположили сытный полдник или половину лодки – не огорчайтесь: такое тоже могло быть.

■ ГОЛОВОЛОМКА С ТЕТРАМИНО

1) Существует 5 различных решений, где $R = 0$, одно из них приведено справа. Здесь все пары одноимённых тетрамино касаются друг друга отрезком, то есть расстояние между ними равно 0.





2) Справа приведено решение, в котором значение R максимально возможное и равно 23. Расположить тетрамино в этом случае возможно единственным образом.

Расстояния между парами тетрамино таковы: $R_I=5$, $R_L=1$, $R_O=7$, $R_T=7$, $R_Z=3$, поэтому $R=5+1+7+7+3=23$. Это решение уникально ещё и потому, что оно является решением заданий 3) и 4).

XXVII ТУРНИР МАТЕМАТИЧЕСКИХ БОЁВ ИМЕНИ А.П. САВИНА

Избранные задачи

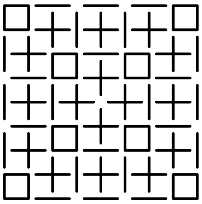
1. Ответ: да. Например, $7\cdot17\cdot17-1=2022$.

2. Ответ: а) нет, б) $\frac{1}{5}$. Разобьём всех поваров на максимальные группы людей одной комплекции, сидящих подряд. Группы полных и худых поваров чередуются, поэтому их поровну. Так как никто не сидит между двумя полными поварами, то в каждой группе полных не более двух поваров, а в каждой группе худых – не менее двух.

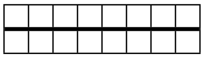
а) Пусть групп полных и худых поваров по n. Значит, полных поваров не более $2n$, а худых – не менее $2n$. По условию полных и худых поваров поровну, следовательно, их по $2n$. Но тогда каждая группа состоит из двух поваров, каждый из них сидит между полным и худым, поэтому нет повода радоваться.

б) Пусть рады по k полных и худых поваров. Тогда количество полных поваров равно $3k$. Полный повар рад, если он в одиночку составляет группу. Остальные полные повара образуют группы по двое, значит, таких групп тоже k, то есть всего групп полных поваров $2k$. Групп худых поваров столько же, в каждой из них рады все повара, кроме двух крайних. Таким образом, есть $2\cdot2k=4k$ не радующихся худых поваров и ещё k радующихся. Следовательно, доля радующихся составляет $\frac{1}{5}$.

3. Ответ: 8 клеток. Петя может оставить 8 клеток, если будет убирать отрезки, как на рисунке.



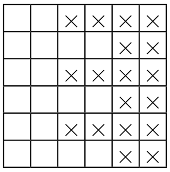
Разобьём квадрат на 4 горизонтальных прямоугольника 2×8 и покажем, что в каждом прямоугольнике Петя не может оставить более двух целых клеток.

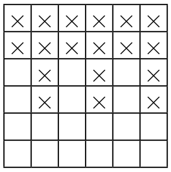


Рассмотрим горизонтальную среднюю линию прямоугольника (см. рисунок). Если Петя убрал из неё два отрезка или меньше, то на линии останется не больше трёх отрезков, каждый из которых должен быть длины 1, иначе можно убрать ещё один отрезок длины 2. Но $3+2\cdot2=7<8$. Значит, Петя убрал хотя бы три отрезка и на линии осталось не больше двух сторон квадратиков. Каждая из них может быть стороной не больше одной целой клетки, иначе можно убрать вертикальный отрезок длины 2. Поэтому в каждом прямоугольнике 2×8 Петя может оставить не более двух целых клеток, а во всём квадрате – не более восьми.

4. Ответ: могут. Разобьём мудрецов на максимальные группы сидящих подряд в одноцветных колпаках. Группы длины 1 запрещены по условию. Группы длины 2 назовём *короткими*, а остальные – *длинными*. Каждый мудрец короткой группы знает цвет своего колпака, поскольку понимает, что сидящий рядом с ним мудрец той же группы не может образовывать группу длины 1. Мудрец длинной группы, сидящий не с краю группы, тоже знает цвет своего колпака, так как понимает, что не может образовывать группу длины 1. Крайние мудрецы длинных групп пусть напишут, например, цвет колпака своего правого соседа. Тогда крайние справа мудрецы из длинных групп ошибутся, зато левые угадают. Поэтому количество ошибок будет равно числу длинных групп. Предположим, что ошибётся не менее 29 человек, тогда и длинных групп не менее 29, а суммарно в них не менее 87 мудрецов. Так как группы в белых и чёрных колпаках чередуются, то их поровну, поэтому общее число групп чётно. Значит, есть ещё хотя бы одна группа, но тогда всего мудрецов не менее 89. Противоречие. Следовательно, ошибётся максимум 28 мудрецов, а не менее 60 напишут цвет своего колпака.

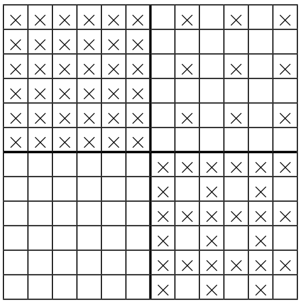
5. а) Ответ: за 2 вопроса. Первый вопрос Дима задаёт про клетки, отмеченные на левом рисунке, второй – про клетки, отмеченные на правом рисунке. После первого вопроса Дима узнает, в каких двух столбцах расположен закрашенный квадрат, а после второго – в каких двух строках. Таким образом, он поймёт, какие клетки закрасил Коля.

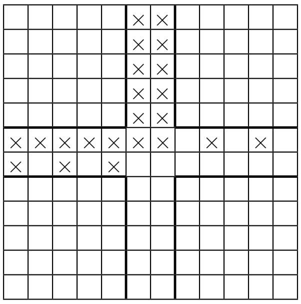




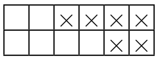
За один вопрос Дима не узнает, где находится квадрат, потому что есть 25 возможных расположений квадрата, а ответов на вопрос – всего пять (от 0 до 4).

б) Ответ: за 3 вопроса. Первый вопрос Дима задаёт про клетки, отмеченные на левом рисунке. Если он получает ответ 0, то закрашенный квадрат находится в левом нижнем квадрате 6×6, если 1 – в правом верхнем, если 3 – в правом нижнем, а если 4 – в левом верхнем. В этих случаях далее Дима действует аналогично п. а).



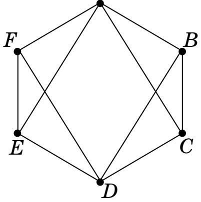


Если же он получает ответ 2, то закрашенный квадрат находится в кресте, показанном на правом рисунке. Тогда Дима задаёт второй вопрос про клетки, отмеченные на этом рисунке. Если он снова получает ответ 2, то Коля закрасил клетки центрального квадрата 2×2. Во всех остальных случаях закрашенный квадрат находится в одном из прямоугольников 2×6 внутри креста. Дима задаёт третий вопрос про клетки этого прямоугольника, отмеченные на рисунке справа, после чего узнает, какие клетки закрасил Коля.



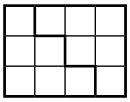
За два вопроса Дима не сможет узнать, где квадрат, потому что на один вопрос он получает только пять различных ответов (от 0 до 4), поэтому за два вопроса он сможет различить не более 25 позиций квадрата, но их 121.

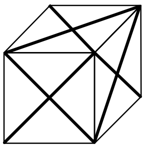
6. Ответ: неверно. Пусть $n=3$, а граф знакомств выглядит так, как показано на рисунке. Предположим, что всех гостей удалось рассадить за прямоугольным столом согласно условию. Поскольку A и D не знакомы, то хотя бы один из них сидит не в середине ряда. Значит, одну из серидин занимает кто-то другой, без ограничения общности можно считать, что это B. Рядом с ним и напротив сидят A, C и D. У C должен быть ещё хотя бы один знакомый, который сидит рядом с ним или напротив, причём это не может быть ни A, ни D. Но никаких других знакомых у него нет. Противоречие.



7. Ответ: можно.

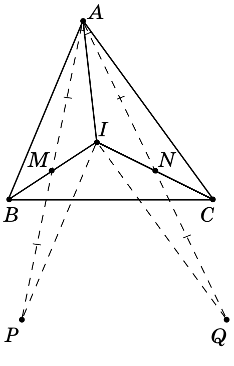
Разрежем прямоугольник, как показано на рисунке. Поверхность куба легко оклеить 12 одинаковыми квадратами, если диагональ каждого квадрата будет совпадать с ребром куба (см. рисунок). Одну из фигур можно разместить так, чтобы клетки, образующие в ней квадрат 2×2, сходились в центре верхней грани куба. Тогда остальные две клетки будут покрывать два соседних боковых ребра. Разместив вторую фигуру симметрично относительно центра куба, получим искомую оклейку.





8. Предположим, что все числа на сторонах различны. Пусть в некоторой клетке записано число k. Так как все числа на сторонах этой клетки различны и делятся на k, то их сумма не меньше $k+2k+3k+4k=10k$. Просуммировав такие неравенства по всем клеткам, мы каждую сторону учтём дважды, поэтому сумма всех чисел на сторонах хотя бы в 5 раз больше суммы всех чисел в клетках. По условию эти суммы отличаются ровно в 5 раз, поэтому все указанные неравенства обращаются в равенства, то есть на сторонах клетки с числом k записаны числа k, $2k$, $3k$, $4k$. Пусть m – наименьшее из всех чисел на сторонах. Тогда на сторонах смежных с ней клеток записаны, например, равные числа $2m$.

9. Ответ: можно. Удвоив медианы AM и AN треугольников ABI и ACI, получим отрезки AP и AQ соответственно. Эти отрезки равны, поскольку по условию $AM=AN$. Так как $ABPI$ и $ACQI$ – параллелограммы, то отрезки IP и IQ равны и параллельны соответственно отрезкам AB и AC. Углы AIP и AIQ дополняют до 180° равные острые углы BAI и CAI, поэтому они тоже равны и при этом тупые. Следовательно, треугольники AIP и AIQ равны по двум сторонам и углу, лежащему против большей из этих сторон, откуда $AB=IP=IQ=AC$.



10. Ответ: например, 8102790310. Мудрец разделит его на числа 81, 0, 27, 9, 0, 3, 1 и 0.

Любое число от 1 до 121 может быть представлено в виде суммы некоторых из чисел 81, 27, 9, 3, 1, взятых со знаком «плюс» или «минус». Про это можно почитать в статье «Как Бусенька меняла знак числа» в «Квантике» №12 за 2014 год. Лишние числа можно убрать, поставив знак умножения между каждым из них и соседним нулём.

11. Пусть прямоугольник имеет размеры $a\times b$, где a – число строк, b – число столбцов. Докажем, что хотя бы одно из чисел a или b делится на n. Предположим, что это не так, и разделим их на n с остатком: $a=kn+a_1$, $b=ln+b_1$. Покрасим клетки прямоугольника в n цветов. Клетки диагонали, содержащей левую верхнюю клетку, – в первый цвет, клетки соседней диагонали – во второй и так далее по циклу, как на рисунке ниже. Так как каждая полоска содержит по одной клетке каждого цвета, то клеток всех цветов поровну. Отрежем от прямоугольника сначала прямоугольник $kn\times b$ снизу, а затем от оставшейся части – прямоугольник $a_1\times ln$ справа. Обе отрезанные части можно разбить на полоски $1\times n$, поэтому в каждой из них клеток всех цветов поровну, а значит, это верно и для оставшегося прямоугольника $a_1\times b_1$. Будем считать, что $a_1\leqslant b_1$ (случай $a_1>b_1$ аналогичен). Тогда всего есть a_1 клеток первого цвета и столько же клеток каждого из остальных цветов (см. рисунок), то есть всего в прямоугольнике $a_1n>a_1b_1$ клеток. Противоречие.

1	2	3	4		
n	1	2	3	4	
	n	1	2	3	4
		n	1	2	3

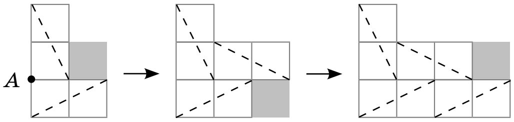
a_1

b_1

Будем считать, что количество столбцов делится на n. Раскрасим клетки прямоугольника в n цветов по-другому. Все клетки первой строки покрасим в первый цвет, второй строки – во второй и так далее по циклу. Тогда количество клеток каждого цвета кратно n. В каждой горизонтальной полоске $1\times n$ число клеток первого цвета равно 0 или n, то есть делится на n. Следовательно, вертикальные полоски содержат кратное n число клеток первого цвета. Но каждая вертикальная полоска покрывает ровно одну клетку первого цвета, поэтому их количество делится на n.

12. Докажем, что удачное разбиение красиво. Проведём в каждой доминошке диагональ из левого нижнего угла в правый верхний. Предположим, что какие-то две диагонали имеют общую вершину A. Тогда квадрат 2×2 с центром A не содержит целиком ни одной доминошки, что противоречит удачности разбиения.

Теперь докажем, что красивое разбиение удачно. Предположим, что это не так и нашёлся квадрат 2×2, не содержащий ни одной целой доминошки. Тогда в его центре A сходятся четыре доминошки. Не более чем у одной из них диагональ может выходить из точки A, поэтому найдутся две доминошки, имеющие общий отрезок границы, у которых проведённые диагонали не содержат точку A. Тогда эти доминошки должны быть расположены перпендикулярно друг другу, то есть как показано на рисунке.



Закрашенную клетку должна покрывать какая-то доминошка, при этом она не может быть вертикальной, иначе её диагональ имела бы общий конец с диагональю одной из рассматриваемых доминошек. Значит, эта клетка покрыта горизонтальной доминошкой, причём её диагональ проводится однозначно. Далее рассмотрим новую закрашенную клетку. Аналогично её может покрывать только горизонтальная доминошка, в которой мы также однозначно проводим диагональ. Продолжая такие рассуждения, придём к противоречию с тем, что число доминошек конечно.

■ «ВО» И «НА»

Ответ: например, когда речь идёт о разнице в возрасте ребёнка и родителя. Можно спросить: «***На*** сколько лет папа старше дочки?» и «***Во*** сколько раз папа старше дочки?».

В первом случае это будет вполне определённое число (скажем, 29 лет). А во втором случае отношение возрастов будет всё время уменьшаться: когда дочке 1 год, папе 30, и отношение равно 30, а когда дочке 2 года, папе 31, и отношение равно 15,5, и с каждым годом отношение будет всё меньше. Почему?

Пусть, скажем, первое число больше другого в 15,5 раз. Тогда если второе число увеличить на 1, то первое надо увеличить на 15,5, чтобы оно по-прежнему было больше второго в 15,5 раз. У нас же первое число тоже увеличивается на 1, поэтому оно остаётся больше второго, но в меньшее число раз.