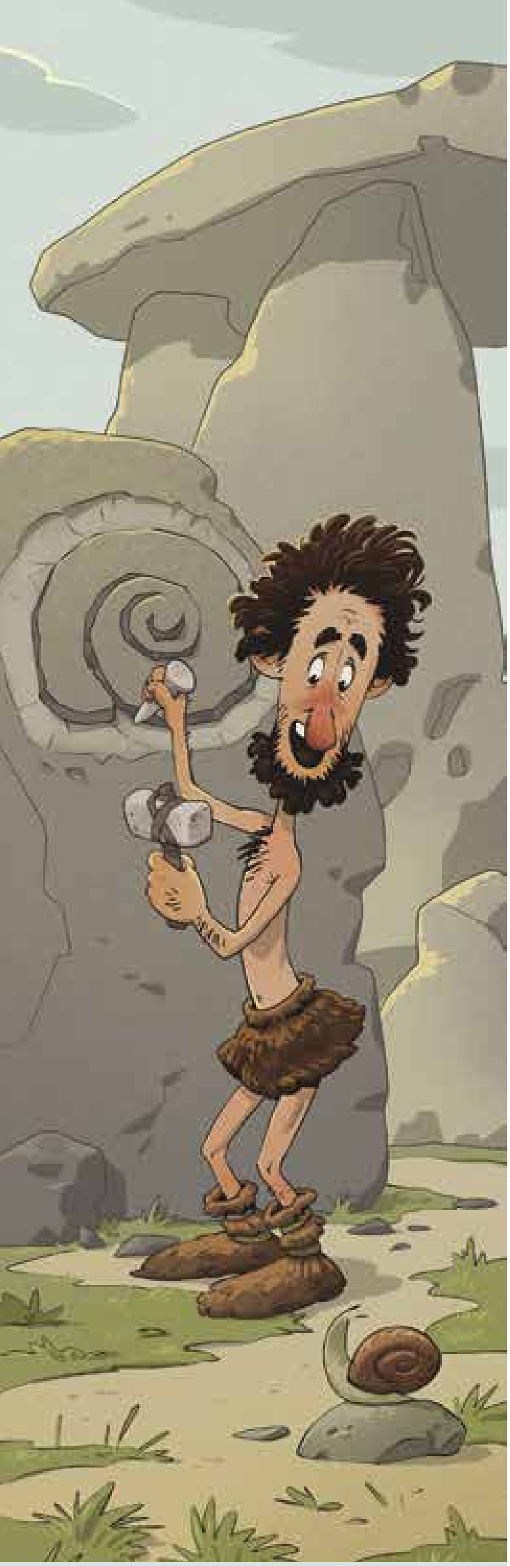
Андрей Щетников

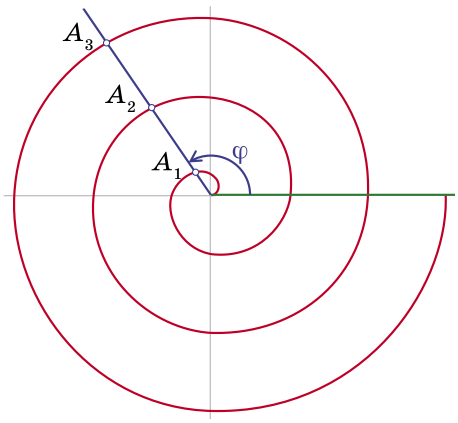


ЭТЮД О СПИРАЛЯХ

Со спиральными линиями люди познакомились, наблюдая их в природе. Спиральную форму имеют раковины улиток. По спирали закручиваются молодые побеги папоротника и листья алоэ. Подражают этим природным спиралям и волю́ты – завитки на капители древнегреческой колонны ионического ордера.

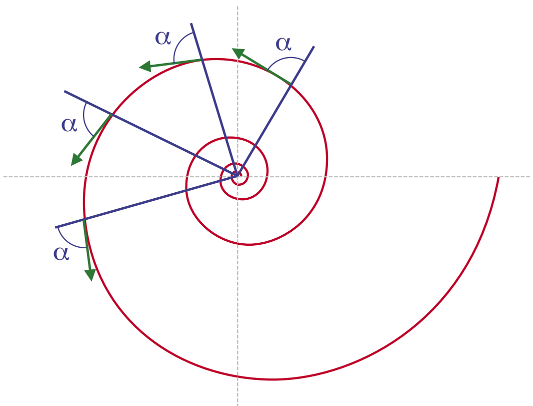


Математическое исследование спиралей тоже началось в Древней Греции. Первую книгу о спиралях написал великий Архимед. В ней он рассмотрел свойства спирали, которую и сегодня называют *архимедовой*, а определил он такую линию следующим образом. *Пусть некий луч на плоскости сохраняет своё начало неподвижным и вращается вокруг этого начала с постоянной скоростью; и пусть одновременно с вращением этого луча какая-нибудь точка перемещается вдоль него с постоянной скоростью, стартуя из неподвижного конца луча; тогда эта точка описывает на плоскости спираль.*

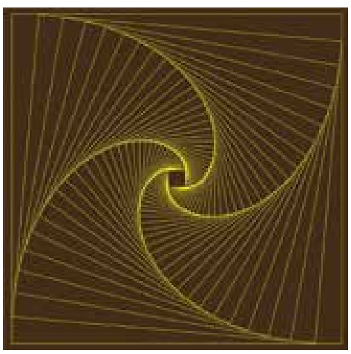


На рисунке зелёным цветом показано начальное положение луча, синим цветом – положение луча после поворота на угол φ, а также на угол $\varphi + 360°$, $\varphi + 720°$ и т. д. За каждый полный оборот луча точка проходит вдоль него одно и то же расстояние, поэтому отрезки A_1A_2, A_2A_3 и т.д. при любом положении луча имеют одну и ту же длину.

Сам Архимед сформулировал и доказал о своей спирали ряд теорем, относящихся к площадям, длинам дуг и касательным. Никаких других спиралей Архимед не рассматривал; однако, если мы посмотрим на спирали раковины улитки и листьев алоэ, мы увидим, что они заметно отличаются от архимедовой спирали, как бы уширяясь при удалении от центра. Самая характерная из такого рода спиралей носит название *логарифмической*. Первым эту спираль рассмотрел в XVII веке Рене Декарт, а подробно исследовал её свойства Якоб Бернулли. Определить эту спираль можно следующим образом. *Когда вдоль логарифмической спирали движется точка, угол между направлением движения этой точки и лучом, проведённым к этой точке из центра спирали, остаётся постоянным.*



С логарифмической спиралью связана одна красивая задача. В вершинах квадрата сидят четыре черепахи. Они одновременно начинают двигаться с одинаковой постоянной скоростью так, что каждая черепаха всё время ползёт в направлении соседней с ней черепахи: первая ко второй, вторая к третьей, третья к четвёртой, четвёртая к первой. Начало такого спирального закручивания исходного квадрата показано на рисунке.



Траекторией каждой черепахи будет логарифмическая спираль, в которой угол между направлениями на центр квадрата и на соседнюю черепаху составляет 45°.

Будем считать, что черепахи – это геометрические точки, не имеющие размера. Ясно, что до своей встречи черепахи сделают бесконечное число оборотов вокруг центра: ведь при любом положении квадрата он может быть повёрнут на тот же угол и уменьшен в той же пропорции. Но какой путь пройдут при этом черепахи вдоль своих траекторий до момента встречи? Попробуйте решить эту задачу самостоятельно.

Спирали, похожие на логарифмическую, встречаются и в природе. К примеру, так выглядит раковина моллюска под названием *наутилус помпилиус*. Каждая следующая воздушная камера в этой раковине геометрически подобна предыдущей, что и порождает нужную форму спирали. Однако эта похожесть в любом случае приближённая, а не математически выверенная. А математическим рассмотрением логарифмическойспирали,какя уже сказал, впервые занялся Рене Декарт в XVII веке.

Каково же было моё удивление, когда в альбоме фотографий дворца халифа Хишама, построенного к северу от Иерихона в первой половине VIII века, я увидел мозаику, выполненную в виде сетки изящных логарифмических спиралей. Получается, что древние всё-таки знали о логарифмической спирали, хотя никаких трудов об этой изящной линии до наших дней не дошло?! Но не будем спешить с выводами. Ведь черепахи из предыдущей задачи строят логарифмическую спираль своим движением, ничего не зная о её математических свойствах. Наверное, в каком-то смысле так же поступили и древние мастера мозаики. Они провели внешнюю окружность и разделили её на 72 равные части. На этих частях как на основаниях были выложены равнобедренные прямоугольные треугольники, направленные прямым углом к центру окружности. Эти треугольники и задали всю конфигурацию дальнейших спиралей: между ними надо расположить квадраты (ну, не совсем квадраты, но поскольку они невелики, от квадратов они мало отличаются), между ними – следующие квадраты и так далее. Для контроля желательно через несколько шагов проводить окружности, на которых должны лежать вершины этих квадратов. При приближении к центру квадраты будут уменьшаться всё сильнее и сильнее: внутренняя окружность в этой мозаике в 12,5 раз меньше внешней, а значит, и элементы узора на ней в 12,5 раз меньше, чем снаружи.

Кстати, в этой мозаике из дворца халифа Хишама скрывается и картинка ползущих по своим спиралям черепах – попробуйте её увидеть.

Фото алоэ: altmanplants.com

Художник Мария Усеинова