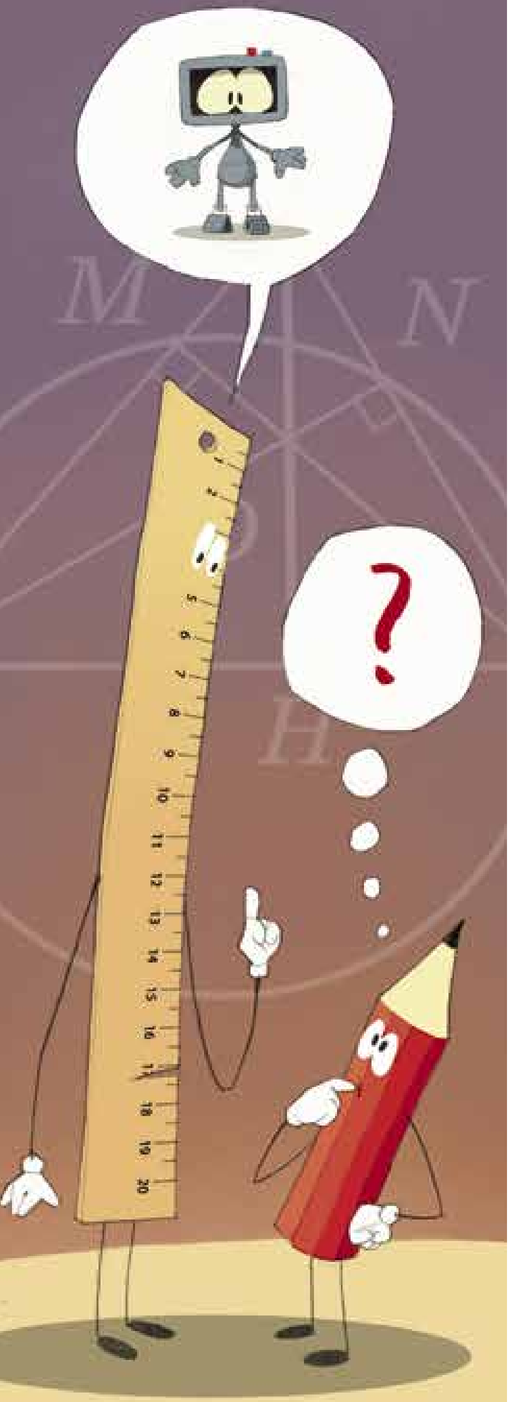
Александр Блинков



ПЕРПЕНДИКУЛЯР – ОДНОЙ ЛИНЕЙКОЙ!

Мы расскажем об одной старой задаче:

Задача 1. *Дана окружность с проведённым в ней диаметром AB и дана точка C. Используя только линейку, проведите через точку C перпендикуляр к прямой AB.*

В нашем распоряжении – только линейка без делений и карандаш. С их помощью можно проводить через любые две имеющиеся точки прямую, а ещё можно отмечать точки пересечения уже проведённых линий. Ничего другого делать нельзя.

Сразу возникает вопрос – а где лежит точка C? Надо с чего-то начать, поэтому разберём

Случай 1. Точка C лежит над диаметром AB вне окружности.

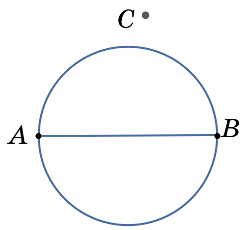


Рис. 1

Решение. Попробуем наугад провести всё, что можем: сначала отрезки AC и BC, которые пересекут полуокружность в точках M и N соответственно; потом отрезки AN и BM до их пересечения в точке D; наконец, прямую CD до её пересечения с AB в точке H (рис. 2).

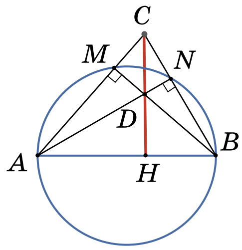


Рис. 2

Если всё проделать аккуратно, мы увидим, что отрезок CH очень похож на перпендикуляр к AB. Попробуем обосновать это наблюдение.

Заметим, что углы AMB и ANB прямые – они вписанные и опираются на диаметр. Значит, AN и BM – высоты треугольника ABC, а D – точка пересечения высот (его *ортоцентр*). Но три высоты треугольника пересекаются в одной точке, поэтому CH – тоже высота!

Случай 2. Точка C лежит внутри окружности, но не на диаметре.

А этот случай мы уже разобрали – надо лишь обозначить данную точку через D и воспользоваться тем же рисунком 2!

Упражнение 1. Объясните подробно построение в случае 2.

Точки C и D как бы двойственны друг другу: если D – ортоцентр треугольника ABC, то C – ортоцентр треугольника ABD. Такие четыре точки A, B, C и D принято называть *ортоцентрической четвёркой*.

Если C лежит прямо над A или B, задача решена.

Случай 3. Точка C лежит вне полосы, ограниченной перпендикулярами к диаметру AB, проходящими через его концы (рис. 3).

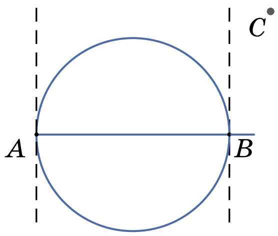


Рис. 3

И в такой формулировке идея решения остаётся прежней.

Упражнение 2. Восстановите решение в случае 3 по рисунку 4.

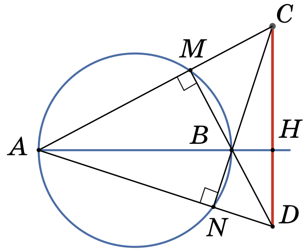


Рис. 4

Случай 4. Точка C лежит на окружности.

Этот случай напоминает первый, но потребуется ещё одна идея.

Решение. Через произвольную точку X, лежащую внутри окружности, проведём прямую, перпендикулярную к AB, как в случае 2. Пусть она пересекает окружность в точках M и N (рис. 5). Проведём отрезок CN, который пересечёт AB в точке P, и луч MP, пересекающий окружность в точке D. Пересечение CD и AB обозначим через H, тогда CH – искомый перпендикуляр.

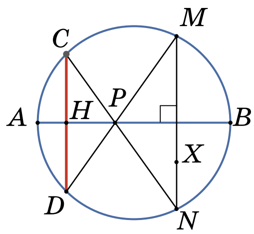


Рис. 5

Действительно, прямая AB – ось симметрии окружности, поэтому точки M и N симметричны относительно AB, значит, симметричны и лучи MP и NP. Значит, точки C и D симметричны относительно AB, то есть CD и AB перпендикулярны.

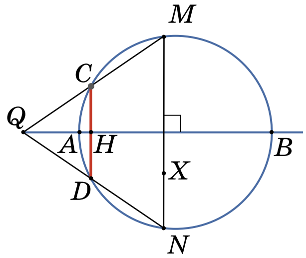
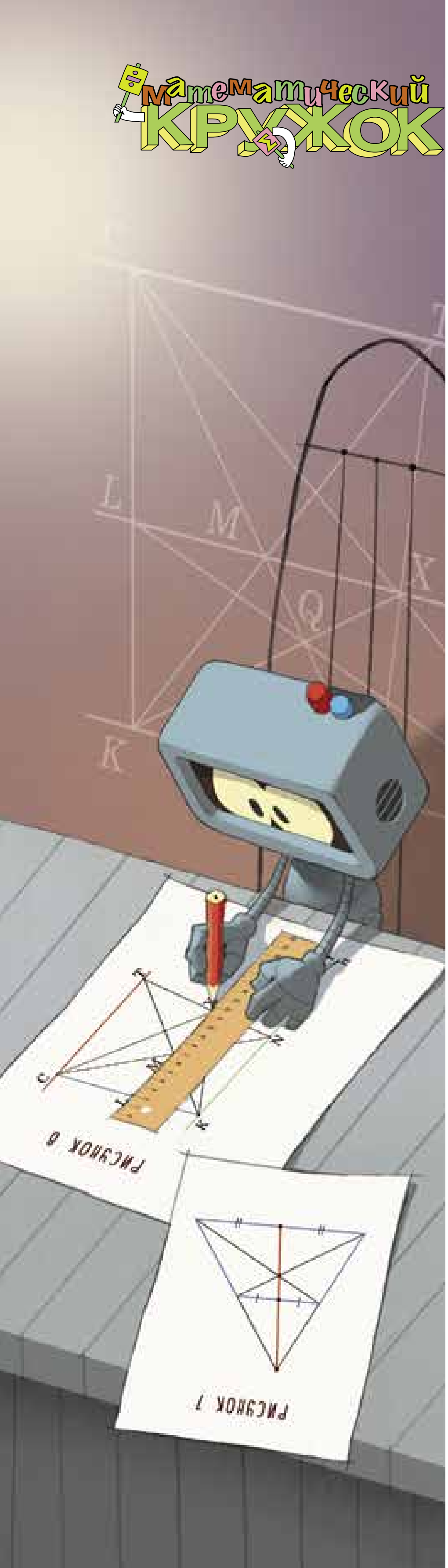


Рис. 6

Упражнение 3. Восстановите другой способ решения задачи в случае 4 по рисунку 6. Всегда ли он работает?



Наиболее сложным является

Случай 5. Точка C лежит на прямой AB.

В решении нам пригодится замечательное свойство трапеции: *середины оснований трапеции лежат на одной прямой с точкой пересечения диагоналей и точкой пересечения продолжений боковых сторон (рис. 7).*

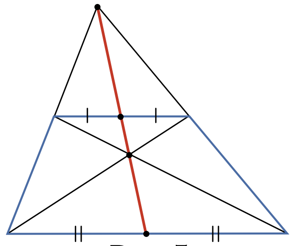


Рис. 7

Решение для случая 5. Выбрав две точки, расположенные так, как в случае 2, построим две прямые, перпендикулярные AB и проходящие через эти точки. Так как искомый перпендикуляр им параллелен, задача сведётся к построению прямой, проходящей через данную точку C и параллельной этим прямым.

Итак, пусть даны две параллельные прямые m и n, пересекающие отрезок AB в точках L и K, и точка C, лежащая вне полосы, ограниченной этими прямыми (рис. 8). Через точку C проведём прямую, пересекающую m и n в точках X и Y соответственно.

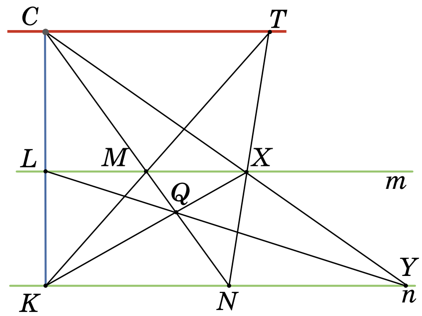


Рис. 8

Далее, проведём отрезки KX и LY, пусть Q – точка их пересечения. Затем проведём прямую CQ, которая пересечёт прямые m и n в точках M и N соответственно. Проведя теперь лучи KM и NX, которые пересекутся в точке T, мы сможем провести искомую прямую CT.

Докажем, что CT и m параллельны. Действительно, $KLXY$ – трапеция, Q – точка пересечения её диагоналей, значит, точки M и N – середины её оснований. Из подобия двух пар треугольников: KTN и MTX, KCN и LCM следует, что

$$\frac{TK}{TM} = \frac{KN}{MX} = \frac{KN}{LM} = \frac{CK}{CL}.$$

Тогда $\frac{TK}{TM} - 1 = \frac{CK}{CL} - 1$, откуда $\frac{KM}{TM} = \frac{KL}{CL}$. Значит, m и CT параллельны (по теореме, обратной к теореме о пропорциональных отрезках).

Упражнение 4. а) По рисунку 9 восстановите построение прямой, параллельной данным прямым m и n и проходящей через точку Q, лежащую внутри ограниченной ими полосы.

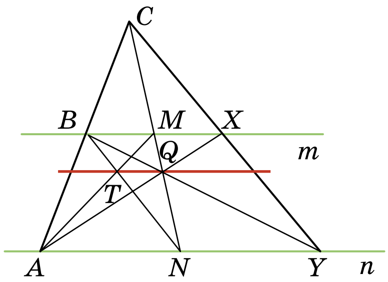


Рис. 9

б) Обоснуйте это построение.

Мы рассмотрели все возможные случаи расположения точки C, исходная задача полностью решена! А теперь покажем, как построить перпендикуляр к хорде из центра окружности.

Задача 2. Даны окружность, в которой отмечен центр O, и произвольная хорда AB (отличная от диаметра). Используя только линейку, постройте перпендикуляр из точки O на AB.

Решение. Проведём лучи AO и BO, которые пересекут окружность в точках C и D соответственно (рис. 10). Тогда $ABCD$ – прямоугольник (его равные диагонали точкой пересечения делятся пополам). Так как треугольник AOB равнобедренный, его высота, проведённая к AB, совпадает с медианой. Значит, достаточно построить середину H отрезка AB.

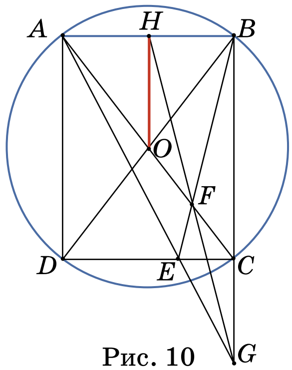


Рис. 10

На отрезке CD отметим произвольную точку E, тогда $ABCE$ – трапеция. Опять используем замечательное свойство трапеции. В нашем случае: F – точка пересечения диагоналей AC и BE, G – точка пересечения AE и BC, поэтому прямая GF пересечёт AB в его середине H. Тогда OH – искомый перпендикуляр.

Упражнение 5. Дана окружность, в которой проведены диаметр и параллельная ему хорда. Используя только линейку, постройте центр окружности.

Упражнение 6. Дана окружность, проведены два её радиуса, не лежащие на одной прямой. Только линейкой постройте биссектрису угла между ними.

Художник Алексей Вайнер