

ПИКОВОЕ ЗАНЯТИЕ

– Сегодняшнее наше занятие – *Пиковое*. Но не надейтесь, что я сейчас достану из кармана колоду карт. Наше занятие – *Пиковое с большой буквы*. И названо в честь австрийского математика XIX–XX веков Георга Александра Пика. Он занимался самыми разными проблемами, порой очень сложными. Математикам известны *матрица Пика*, *интерполяция Пика* и многое другое. Но наиболее широко он прославился *формулой Пика*, позволяющей определять площади многоугольников на квадратной сетке.

Поясню вкратце для тех, кто не в курсе. Пусть бесконечная плоскость разбита вертикальными и горизонтальными прямыми на одинаковые квадраты площади 1 каждый. Назовём *узлами* вершины квадратов и нарисуем произвольный многоугольник,

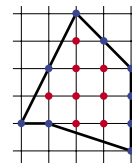


Рис. 1

все вершины которого лежат в узлах. Стороны многоугольника не обязаны быть вертикальными или горизонтальными (хотя это и допускается). Подсчитаем количество B узлов, попавших *строго внутрь* многоугольника, и количество Γ узлов, оказавшихся *на его границе*. Последними будут, безусловно, все вершины многоугольника (по условию), а возможно, и ещё какие-то узлы, попавшие на стороны. Так, пятиугольник на рисунке 1 имеет 8 узлов внутри (отмечены красным), то есть $B=8$, и 9 узлов на границе (синие), то есть $\Gamma=9$.

Оказывается, площадь любого многоугольника с вершинами в узлах зависит *только* от значений B и Γ и вычисляется по формуле

$$S = B + 0,5\Gamma - 1.$$

Это и есть знаменитая формула Пика. Именно её красота покорила весь мир. Говорят, в Германии она даже включена в школьную программу (у нас пока нет). Для пятиугольника на рисунке 1 получаем

$$S = 8 + 0,5 \cdot 9 - 1 = 11,5.$$

Доказательство формулы Пика не простое, но и не слишком сложное. Его можно найти на страницах и «Кванта», и «Квантика». Мы на это отвлекаться не будем – кто любопытен, сам найдёт и прочтёт. Отметим только, что аналоги формулы Пика имеются и для других видов бесконечной сетки – например, треугольной.

Мы же с вами займёмся другим делом – осуществим *переход от точек к отрезкам*.

– Это как?

– Сейчас объясню. Формула Пика носит, образно говоря, *точечный характер*, ибо в ней мы подсчитываем точки, лежащие внутри и на границе многоугольника. Давайте аналогичные действия произведём с *отрезками самой сетки*, попавшими внутрь многоугольника либо совпавшими с какими-то его сторонами. Сначала – по горизонтали. В рассмотренном нами пятиугольнике выделим красным кусочки горизонтальных линий сетки, попавшие внутрь, и синим – горизонтальные стороны (рис. 2). А теперь, по аналогии, подсчитаем *суммарную длину В* отрезков сетки, попавших внутрь многоугольника (красных) и *суммарную длину Г* отрезков сетки, совпадающих с его сторонами (синих). В нашем случае красных отрезков четыре. Верхний, как нетрудно понять, равен 1,5 – нецелому числу. Не очень радуется, но ничего не поделаешь, придётся терпеть. Зато второй сверху – ровно 3. Третий тоже нецелый – 3,5. Четвёртый – снова 3. Итого $B = 1,5 + 3 + 3,5 + 3 = 11$. Синий же отрезок лишь один, длины 1, поэтому $G = 1$. Так вот, оказывается, площадь любого многоугольника тоже зависит лишь от B и G и вычисляется по формуле:

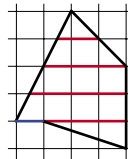


Рис. 2

$S = B + 0,5G$.

Почти точное совпадение с формулой Пика. Например, для нашего пятиугольника

$$S = 11 + 0,5 \cdot 1 = 11,5.$$

– А если взять вертикальные линии сетки?

– Попробуем! Здесь (рис. 3) получается лишь 3 красных отрезка, но с определением их длин придётся повозиться. Самый левый равен 2. А вот дальше... Средний, как видно, равен 4 с *небольшим*, а правый – 3 с *небольшим* (правда, с *другим* небольшим).

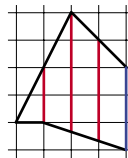


Рис. 3

И эти *небольшие* добавки порождает нижняя сторона нашего пятиугольника. Как же нам их определить?

– Я понял! Нижняя сторона – это же диагональ прямоугольника 1×3 . Она делит его на симметричные части, поэтому вторая добавка дополняет первую до единицы!

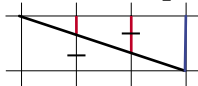


Рис. 4



– Отлично! Значит, сумма длин среднего и правого красных отрезков равна $4 + 3 + 1 = 8$. Синий же отрезок равен 3. Впрочем, с синими отрезками проблем быть не может – их длины *всегда целые* (сумеете это доказать?). Теперь мы можем определить площадь пятиугольника и третьим способом – по длинам вертикальных отрезков. Здесь $B = 2 + 8 = 10$ и $G = 3$. Поэтому

$$S = 10 + 0,5 \cdot 3 = 11,5.$$

Можете «испытать» и другие многоугольники и убедиться, что всегда получается верный ответ. Поэтому мы можем с гордостью назвать нашу формулу *линейной формулой Пика* (или, если хотите, *отрезковой*).

– А доказательство у вас есть?

– Да, и весьма простое. Изложу его для горизонтальных отрезков (а для вертикальных можно повернуть картинку на 90°). Разрежем многоугольник горизонтальными линиями сетки на «дольки». Каждая такая долька – многоугольник, ограниченный с двух сторон прямыми, расстояние между которыми равно 1. Все его вершины *непрерывно* лежат на этих прямых – ведь узлы все находятся на горизонтальных прямых, и *между соседними прямыми* узлов нет. А раз так, «ассортимент» возможных видов долек очень невелик. Это может быть трапеция, параллелограмм либо треугольник – и обязательно с *единичной* высотой.

Если это трапеция с основаниями a и b , то площадь её равна $\frac{a+b}{2} \cdot 1 = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$. Для параллелограмма – то же самое, только здесь в придачу ко всему $a = b$. И для треугольника формула верна – надо лишь учесть, что или $a = 0$, или $b = 0$. Так что площадь каждой дольки равна сумме *половин* отрезков, ограничивающих её сверху и снизу. И потому площадь *всего* многоугольника есть сумма таких половин для всех долек. Когда отрезок общий для двух соседних долек, его половина войдёт в сумму дважды, и в этой сумме, таким образом, участвует просто длина отрезка. А если отрезок крайний – то его половина и останется. Но ведь это и есть описание приведённой формулы: сумма длин отрезков, попавших внутрь многоугольника, плюс полусумма длин отрезков, попавших на его границу (то есть совпадающих с какими-либо сторонами). Доказательство закончено.

Вижу, все согласны, кроме вот этого молодого человека. Что же вас не устраивает?

– Да нет, устраивает, но... кое-что здесь *лишнее*.

– Это как?

– В доказательстве не использовался тот факт, что сетка – *квадратная*. Учитывалось только разбиение плоскости параллельными прямыми на слои единичной ширины. И потому данная формула, как мне кажется, пригодна и для многоугольника, все вершины которого лежат на каких-то параллельных прямых, разбивающих плоскость на полосы равной ширины.

– Справедливо! Поэтому давайте окончательно сформулируем теорему так.

Пусть плоскость разбита бесконечным количеством параллельных прямых на слои равной единичной ширины. Каждая вершина некоторого многоугольника лежит на одной из этих прямых. Подсчитаем суммарную длину B отрезков прямых, попавших строго внутрь многоугольника, и суммарную длину Γ отрезков прямых, совпадающих с какими-то сторонами многоугольника. Тогда площадь многоугольника может быть определена по формуле:

$$S = B + 0,5\Gamma.$$

Ну как, теперь сойдёт?

– Вполне.

– Вот и прекрасно. А вам спасибо за своевременную критику. На этом можно бы и откланяться, но сначала предложу вам для размышления задачу¹:

На бумаге «в клеточку» нарисован выпуклый многоугольник M , так что все его вершины находятся в вершинах клеток и ни одна из его сторон не идёт по вертикали или горизонтали. Докажите, что сумма длин вертикальных отрезков линий сетки, заключённых внутри M , равна сумме длин горизонтальных отрезков линий сетки внутри M .

Вооруженные нашими сегодняшними достижениями, вы, надеюсь, одолеете её без труда. До свидания!

К читателям. Решите и вы эту задачу, используя линейную формулу Пика. Ответ в следующем номере.

¹ Автор задачи – Г. Гальперин. Задача была предложена в 10 классе на Московской математической олимпиаде 2000 года, а также в 10–11 классах на Турнире городов 1999–2000 года.



Художник Мария Усеинова