

XV Южный математический турнир ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ

ОЛИМПИАДЫ

Материал подготовили: Д. Мамий и составители лиги «Старт» Е. Бакаев, С. Дориченко, С. Волчёнков, П. Кожевников, К. Сухов

Логика, игры, комбинаторика

1. (С. Волчёнков) В ряд выстроились несколько журналистов. Каждый заявил, что он стоит между двумя лжецами. Проанализировав ситуацию, Шерлок Холмс заявил, что честных среди журналистов может быть любое количество от 7 до 11. Сколько всего журналистов в строю, если каждый журналист либо честный (всегда говорит правду), либо лжец (всегда врёт)?

2. (Задача из США) В каждой клетке таблицы 3×3 стоит число. Произведение чисел и в каждой строке, и в каждом столбце равно 1, а произведение чисел в каждом квадрате 2×2 равно 2. Чему может равняться число в центральной клетке?

3. (С. Волчёнков) В клане Дона Корлеоне 100 человек (включая его самого), причём Дон Корлеоне может связаться с каждым, возможно по цепочке знакомых. Каждый член клана знает ровно пятерых других членов клана. Каким наибольшим может быть количество мафиози, попарно не знающих друг друга?

4. (Д. Кузнецов) Вася желает разместить 11 слонов, не бьющих друг друга, на доске 6×6 . Так как это невозможно, он решил поставить на одно из полей фишку, через которую слоны не бьют. Сколькими способами он может поставить фишку так, чтобы его желание о расстановке 11 слонов стало осуществимо?

5. (Задача из Сальвадора) Двое по очереди закрашивают на доске 9×10 клетку, доминошку или уголок из трёх клеток. Закрашивать можно только не закрашенные ранее клетки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто может обеспечить себе победу?

6. (Задача из Южной Америки) Дана клетчатая доска 2022×2022 . Сначала Аня красит стороны некоторых клеток в красный цвет так, чтобы ни у какой клетки не нашлось двух соседних красных сторон. Затем Боря должен закрасить неокрашенные стороны некоторых клеток синим цветом так, чтобы получил-

Турнир проводится Кавказским математическим центром Адыгейского государственного университета и Адыгейской республиканской естественно-математической школой каждый сентябрь во Всероссийском детском центре «Орлёнок». В XV Турнире участвовали 250 школьников с 7 по 11 класс. Приводим избранные задачи лиги «Старт» (полный отчёт тут: adymath.ru).





ся синий путь между какими-то двумя углами доски. Всегда ли Боря сможет это сделать, как бы ни действовала Аня?

7. (Задача из Швейцарии) Сто фиолетовых и сто белых коров стоят в очереди на водопой. Тим может выбрать любую группу из чётного числа коров, стоящих подряд, и поменять местами первую половину этой группы со второй половиной (сохранив порядок коров в группах). Какое наименьшее количество таких операций заведомо позволит Тиму добиться того, чтобы все фиолетовые коровы оказались в начале очереди?

Геометрия обычная и комбинаторная

8. (Джон Джексон, 1821) Можно ли расположить 9 точек на плоскости так, чтобы никакие 4 точки не лежали на одной прямой и было хотя бы 10 троек точек, лежащих на одной прямой?

9. (Л. Емельянов) В треугольнике ABC с острыми углами A и B проведены биссектрисы AA_1 и BB_1 . Докажите, что прямые, проведённые через A_1 и B_1 перпендикулярно AB , либо обе касаются вписанной окружности треугольника ABC , либо обе её не касаются.

10. (Е. Бакаев) Дан остроугольный треугольник ABC . На сторонах AB и BC во внешнюю сторону построены квадраты $ABKL$ и $BCMN$. Точка O – середина отрезка LM . Докажите, что расстояние от точки O до прямой AC в два раза меньше длины отрезка AC .

11. (И. Вайнштейн) В неравнобедренном остроугольном треугольнике ABC с углом $A = 45^\circ$ высоты пересекаются в точке H . Вася отметил красным точки A_1, B_1, C_1 – основания высот треугольника ABC , а также точки $A_0, B_0, C_0, A_2, B_2, C_2$ – середины отрезков BC, CA, AB, AH, BH, CH соответственно. Докажите, что какие-то 8 из 9 красных точек являются вершинами двух квадратов.

12. (Задача из Ирана) Клетчатый прямоугольник $m \times n$ разбит на квадратики 2×2 и прямоугольни-



ки 1×3 . Докажите, что число способов положить доминошку 1×2 так, чтобы одна её клетка попала в квадрат 2×2 , а вторая – в прямоугольник 1×3 , чётно. (Прямоугольники могут располагаться и горизонтально, и вертикально. Доминошки кладутся «по клеточкам».)

13. (Задача из США) На плоскости сидят 6 мух. Мухобойка представляет собой объединение чёрных клеток бесконечной шахматной доски (белые клетки – это дыры). Можно ли расположить мухобойку так (её можно сдвигать и поворачивать), чтобы она попала хотя бы по пяти мухам? Мухи – это точки; если муха попала на границу клетки, то мухобойка по ней попала.

Арифметика и алгебра

14. (Задача из Бангладеш) Найдите наименьшее n , для которого верно утверждение: среди любых n последовательных натуральных чисел найдётся число, сумма цифр которого делится на 17.

15. (Задача из Бангладеш) Натуральное число n называется *бенгальским*, если оно имеет хотя бы 4 натуральных делителя, а сумма его четырёх наибольших натуральных делителей равна $2n$. Найдите количество бенгальских чисел, не превосходящих 3000.

16. (Задача из Сальвадора) Найдите все тройки целых ненулевых чисел (a, b, c) , для которых верны равенства: $a^3 + a^2 + b^2 = 0$; $b^3 + b^2 + c^2 = 0$; $c^3 + c^2 + a^2 = 0$.

17. (Задача из Китая) На доске написано число, большее натурального на 0,5. Каждую минуту число на доске умножают на наименьшее целое число, не меньшее его. Могло ли случиться, что на доске впервые появится целое число ровно через 2022 минуты?

18. (Задача из Болгарии) Смешиванием последовательности $a_1, a_2, \dots, a_{3n}$ назовём превращение её в последовательность $a_3, a_6, \dots, a_{3n}, a_2, a_5, \dots, a_{3n-1}, a_1, a_4, \dots, a_{3n-2}$. Можно ли из последовательности 1, 2, ..., 192 за несколько смешиваний получить последовательность 192, 191, ..., 1?



Художник Сергей Чуб