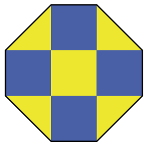
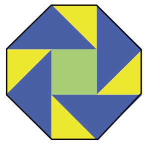
НАШ КОНКУРС, II ТУР
(«Квантик» № 10, 2022)

6. *В гостиной, спальне и кухне висят градусники. В спальне температура всегда выше на 1 градус, чем в гостиной, а на кухне – ещё на 1 градус выше. Петя записал утром, днём и вечером показания всех трёх градусников, но ровно в одном числе сделал опечатку. В результате получились числа (в каком-то порядке):* 17, 18, 19, 22, 25, 25, 26, 27, 27. *В каком числе опечатка и что должно там стоять? Ответ обоснуйте.*

Ответ: вместо 22 должно быть 26. Из тройки «одновременных» показаний любые два отличаются не более чем на 2 градуса. Но 22 отличается от остальных чисел не менее чем на 3, значит, опечатка в «22». В тройку с 17 могут входить только 18 и 19, а в тройку с 27 – только 26 и 25. Остались 25 и 27, между ними не хватает 26.

7. *Маша сшила восьмиугольную скатерть из пяти квадратов и четырёх равнобедренных прямоугольных треугольников (см. рисунок). А можно ли сшить точно такую же скатерть из одного квадрата и восьми равнобедренных прямоугольных треугольников (не обязательно одинаковых)?*





Ответ: да, см. рисунок.

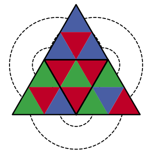
8. *В слове СЛУЧАЙНОСТЬ школьники случайным образом заменяют буквы на цифры (одинаковые буквы на одинаковые цифры, а разные буквы на разные цифры, причем первая буква слова не может заменяться на цифру 0). Найдите вероятность того, что полученное в результате число делится на 3. (То есть какую долю среди всех возможных вариантов составляют числа, делящиеся на 3.)*

Ответ: 1/3. Число делится на 3, если и только если сумма его цифр делится на 3. Откинем в слове «случайность» первую «с», останутся 10 различных букв, тогда это цифры от 0 до 9, и с + л + у + ч + а + й + н + о + с + т + ь = с + 45. Буква «с» может принимать 9 значений от 1 до 9, но сумма цифр делится на 3 лишь в трёх случаях (с = 3, 6, 9), искомая вероятность равна 3/9.

Решите задачу для слова УЧИТЕЛЬНИЦА.

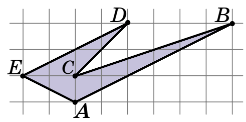
9. *Все грани треугольной пирамидки – одинаковые равносторонние треугольники. У каждой грани отметили середины сторон и соединили друг с другом, разбив грань на 4 одинаковых маленьких треугольничка. Каждый из этих 16 получившихся треугольничков окрасили в один из трёх цветов – красный, синий или зелёный, – так, что любые два треугольничка с общей стороной окрашены в разные цвета (не забудьте, что треугольнички с общей стороной могут принадлежать и разным граням). Какое наибольшее количество красных треугольничков могло получиться?*

Ответ: 6. В каждой вершине пирамидки сходятся три треугольничка, граничащие друг с другом, то есть красный, синий и зелёный. Остаются треугольнички в серединах четырёх граней. Никакие три из них не могут быть все красными: иначе при общей вершине трёх граней с красными центральными треугольничками не будет красного треугольничка. Значит, всего красных треугольничков не более $4 + 2 = 6$.



На рисунке – подходящая раскраска развёртки пирамидки (линиями соединены грани, которые станут соседними, если склеить развёртку).

10. *Существует ли многоугольник, который с помощью одного прямолинейного разреза можно разрезать на треугольники с площадями* 1, 2, 3, *а с помощью другого прямолинейного разреза – на треугольники с площадями* 2, 2, 2?

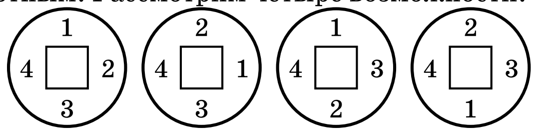


Ответ: да, например, пятиугольник $ABCDE$ на рисунке. Разрезав его по прямой AC, получим три треугольника с площадями 1, 2, 3, а по прямой EC – три треугольника с площадями 2, 2, 2.

«КИТАЙСКИЕ МОНЕТЫ» ЯПОНИИ И ВЬЕТНАМА («Квантик» № 11, 2022)

Все названия монет четырёхсложные; в китайском и вьетнамском они записываются как отдельные слова, в японском – как два двусложных слова; для простоты будем называть их словами.

Два последних слова в названиях – *tōng bǎo* \ *tsūhō* \ *thông bảo* или (реже) *yuán bǎo* \ *genpō* \ *nguyen bảo*. На всех монетах слева стоит иероглиф 寶: видимо, это – *bǎo* \ (*hō* или *pō*) \ *bảo*. Но 通寶 \ *tōng bǎo* \ *tsūhō* \ *thông bảo* может занимать позиции справа-слева и снизу-слева, 元寶 \ *yuán bǎo* \ *genpō* \ *nguyen bảo* – снизу-слева. Значит, порядок иероглифов не является стандартным. Рассмотрим четыре возможности:



2	祥 寶 □ 符 元	Xiáng Fú Yuán Bǎo	Shofu Genpō	Tường Phù Nguyên Bảo
13	祥 寶 □ 符 通	Xiáng Fú Tōng Bǎo	Shofu Tsūhō	
11	元 寶 □ 符 通	Yuán Fú Tōng Bǎo	Genfu Tsūhō	
8	平 寶 □ 通 安		Heian Tsūhō	Bình An Thông Bảo
15	安 寶 □ 法 元			An Pháp Nguyên Bảo

1	治 寶 □ 平 元	Zhì Píng Yuán Bǎo	Jihei Genpō	Trị Bình Nguyên Bảo
5	治 寶 □ 通 平	Zhì Píng Tōng Bǎo		Trị Bình Thông Bảo
3	嘉 寶 □ 通 祐	Jiā You Tōng Bǎo	Kayū Tsūhō	Gia Hựu Thông Bảo
12	元 寶 □ 祐 通	Yuán You Tōng Bǎo	Genyū Tsūhō	
9	嘉 寶 □ 通 靖	Jiā Jìng Tōng Bǎo	Katei Tsūhō	

6	乾 寶 □ 通 隆	Qián Lóng Tōng Bǎo		Càn Long Thông Bảo
4	乾 寶 □ 統 元	Qián Tǒng Yuán Bǎo		Càn Thống Nguyên Bảo
7	正 寶 □ 隆 元	Zèng Lóng Yuán Bǎo		Chính Long Nguyên Bảo
10	元 寶 □ 豊 通	Yuán Fēng Tōng Bǎo	Genpō Tsūhō	
14	元 寶 □ 通 豊			Nguyên Phong Thông Bảo

Посмотрим на другие повторяющиеся иероглифы. Например, иероглиф 元 *yuán* \ *gen-* \ *nguyên* бывает самым первым словом в названии и в таком случае всегда стоит наверху. Есть две монеты с одинаковым набором иероглифов: 10-я и 14-я. Видимо, первая читается в порядке сверху-справа-снизу-слева (по часовой стрелке), а вторая – сверху-снизу-справа-слева (крестом).

Можно ли объяснить так надписи на остальных монетах? Иероглиф 嘉 стоит наверху на монетах 3 ***kayū** tsūhō* и 9 ***katei** tsūhō*: это вариант «крестом». Иероглиф 平 стоит справа на монете 1 ***jihei** genpō* и наверху на монете 8 ***heian** tsūhō*: это варианты «по стрелке» и «крестом». Иероглиф 符 на монете 2 ***shofu** genpō* \ *tướng phù nguyên bảo* стоит справа, как и на монете 13 *xiáng fú tōng bǎo*; предполагаем соответствие *xiáng* \ *sho* \ *tướng* и *fú* \ *fu* \ *phù*, это вариант «по стрелке». Сравним монеты 1 ***jihei** genpō* \ *trị bình nguyên bảo* и 5 ***zhì** píng tōng bǎo* \ *trị bình thông bảo*: на обеих имеется пара иероглифов 治平; предполагаем соответствия *zhì* \ *ji* \ *trí* и *píng* \ *hei* \ *bình*, тогда первая монета читается «по стрелке», а вторая – «крестом». Всё сходится: есть лишь два варианта чтения.

Есть сложность с монетой 10 *yuán **fēng** tōng bǎo* \ *gen**pō** tsuho*: в ней нет ожидаемой из японского варианта пары 元寶 *genpō* (третье и четвёртое слово на многих монетах). Видимо, оба иероглифа 寶 (кит. *bǎo*) и 豊 (кит. *fēng*) соответствуют японскому *pō*. Мы уже видели пример неоднозначного соответствия с одним из них, но в другую сторону: 寶 читался по-разному в *gen**pō*** (кит. *yuán **bǎo***) и в *tsū**hō*** (кит. *tōng **bǎo***).

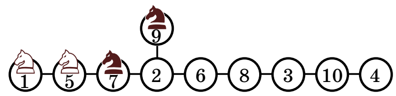
Ответы – в таблице (даны красным, зелёным выделены нетривиальные источники чтений, синим – неоднозначные места). Монеты переставлены, чтобы источники и ответы были рядом.

ПОНЯТЬ ФОРМУ ДОСКИ

(«Квантик» № 11, 2022)

	1		
	2	3	
	4	5	6
7	8	9	10

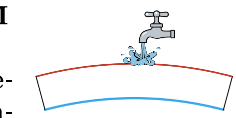
Ответ: да. Пронумеруем клетки, затем вместо каждой нарисуем кружок и соединим линиями кружки, между которыми есть ход коня. Получим картинку (граф):



Теперь видно, как поменять коней местами. (Отводим вправо чёрных коней, смещаем одного белого в клетку 9, возвращаем чёрных коней влево, а белого из клетки 9 уводим вправо, затем аналогично проводим вправо второго белого коня.)

ДОЩЕЧКА ПОД КРАНОМ

(«Квантик» № 11, 2022)



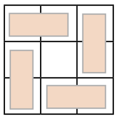
Дело в тепловом расширении. Сторона дощечки, обращённая к горячей струе, нагревается сильнее, чем обратная, а поэтому увеличивается больше, и дощечка искривляется, как на рисунке.

КАНИСТРА С ТРЕМЯ РУЧКАМИ
(«Квантик» № 11, 2022)

Такую канистру удобно нести как одному человеку (за центральную ручку), так и двоим (за две ручки по краям). Ещё ручки по краям позволяют нести в одной руке две пустые канистры.

XV ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТУРНИР. Избранные задачи

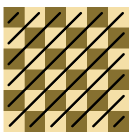
1. Ответ: 23. Каждый честный стоит между двумя лжецами, никакие три лжеца не стоят подряд. Если честных 7, то лжецов максимум по два по краям и по два между честными, а всего людей максимум $7+2+2+2\cdot 6=23$. Если честных 11, то лжецов минимум по одному по краям и по одному между честными, всего людей минимум $11+1+1+10=23$. Значит, их ровно 23.



2. Ответ: 16. Произведение всех чисел двух левых столбцов равно $1\cdot 1=$ $=1$. А произведение в левом нижнем квадрате 2×2 равно 2. Значит, в верхней левой доминошке произведение равно 1/2. Аналогично, произведение равно 1/2 ещё в трёх доминошках (см. рисунок). Но произведение всех чисел таблицы равно 1. Тогда в центре 16.

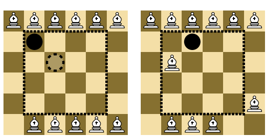
3. Ответ: 50. Докажем, что больше выбрать нельзя. Соединим каждых двух знакомых линией. Пусть нашлись 51 мафиози, между которыми нет линий. Так как каждый знаком с пятью другими, от этих 51 мафиози идёт $51\cdot 5$ линий к остальным 49. Но от тех к первым 51 идёт не более $49\cdot 5$ линий, что меньше $51\cdot 5$ – противоречие.

Вот пример, когда 50 людей выбрать можно. Расставим всех в два круга по 50 мафиози и занумеруем подряд в каждом круге числами от 1 до 50. Каждого мафиози 1-го круга познакомим с соответствующим мафиози и следующими четырьмя по часовой стрелке 2-го круга. Каждый тогда знает пятерых, а в 1-м круге все незнакомы.



4. Ответ: 16. Без фишки не обойтись: иначе на каждой из 11 диагоналей, идущих вправо вверх, стоит ровно один слон. Но тогда слоны из крайних диагоналей бьют друг друга!

На край доски фишку ставить нельзя: там она не мешает фигурам бить друг друга. А на любое поле внутреннего квадрата 4×4 фишку поставить можно. Подсказки справа.



5. Ответ: начинающий, поставив первым ходом доминошку в две центральные клетки доски. Далее на каждый ход второго он делает симметричный ход относительно центра доски. Второй нарушает симметрию, а первый восстанавливает. Второй не может одним ходом занять клетки, симметричные относительно центра доски (мешает первая доминошка). Поэтому, если второй смог сделать ход, то и первый сможет – симметричное место свободно. Пустые клетки когда-то закончатся, и первый выиграет.

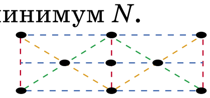
6. Ответ: всегда. Пусть Боря рисует путь из левого верхнего угла, двигаясь каждый раз вправо или вниз. У него всегда будет ход, пока он не на границе, так как нет точки, из которой вправо и вниз ведут красные отрезки. Если он придёт в угол, задача решена. Иначе он придёт во внутреннюю точку дальней стороны квадрата, пусть нижней. Тогда он построит аналогичный путь из левого нижнего угла, идущий только вправо или вверх. Этот путь пересечёт предыдущий, и Боря соединит путём левые углы доски.

7. Ответ: 100. Обозначим фиолетовых коров нулями, а белых – единицами. Докажем, что любую расстановку из N нулей и N единиц можно не более, чем за N операций превратить в нужную (вида 00...11...). Для $N=1$ это ясно. Покажем, как сводить задачу от данного N к меньшему.

В расстановке вида 0...1 можно не трогать крайние цифры и справиться за $N-1$ операций. В случае 0...0 найдётся 1 во второй половине: тогда возьмём правый кусок от конца до этой единицы и поменяем с предыдущим куском той же длины и 1 на конце, получим вид 0...1. Аналогично справимся в случае 1...1. В случае же 1...0 расставим внутренние цифры не более чем за $N-1$ операций в порядке 111... 000..., а потом поменяем первую половину всей группы со второй!

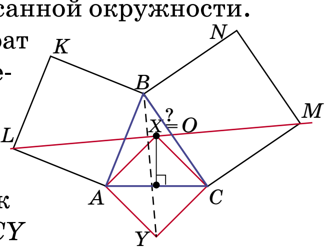
Докажем, что в случае комбинации 1010...10 нужны минимум N операций. Добавим в начало и конец вспомогательные 0 и 1: 0 1010...10 1. Скажем, что пара разных соседних цифр (10 или 01) образует плохую связь. В конце должна остаться ровно одна плохая связь, а вначале их $2N+1$. За ход мы выбираем какие-то два блока одной длины и меняем местами, разрушая максимум 3 связи. Но поскольку в самом начале у нас всегда 0 (вспомогательный), а в самом конце – 1, число плохих связей в любой момент нечётно. Значит, мы разрушаем максимум две связи! Поэтому, ходов нужно минимум N.

8. Ответ: да, см. рисунок.

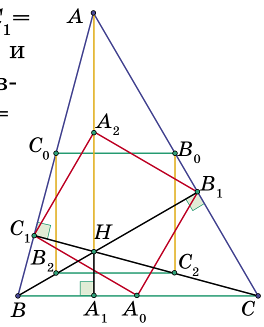


9. Биссектрисы проходят через центр вписанной окружности. Опустим перпендикуляры B_1X и A_1Y из точек B_1 и A_1 на AB. Так как углы A и B острые, прямые AC и B_1X различны и прямые BC и A_1X различны. Пусть B_1X касается вписанной окружности. Значит, треугольники XB_1B и CB_1B равны по стороне BB_1 и прилежащим к ней углам, откуда $\angle C = 90°$. Тогда прямоугольные треугольники YA_1A и CA_1A равны по углу и гипотенузе, тогда $\angle YA_1A = \angle CA_1A$, откуда A_1Y тоже касается вписанной окружности.

10. Построим квадрат $AXCY$ (см. рисунок). Треугольник LAX переходит в треугольник BAY при повороте на $90°$ вокруг точки A, а треугольник MCX – в треугольник BCY при повороте на $90°$ вокруг точки C в обратную сторону. При этом отрезки LX и MX оба переходят в отрезок BY. Значит, LX и MX равны по длине, а угол между ними $180°$, то есть X – середина LM и она совпадает с O. Теперь задача очевидна.



11. Так как $\angle ABB_1 = \angle ACC_1 = 45°$, треугольники AC_1C и BC_1H – прямоугольные равнобедренные. Отсюда $C_1B = C_1H$ и $C_1A = C_1C$, значит, треугольники AC_1H и CC_1B равны, откуда $AH = BC$.



$B_0C_0B_2C_2$ – квадрат: его стороны – средние линии в треугольниках с основаниями AH и BC; $A_0C_1A_2B_1$ – ромб: его стороны – медианы в прямоугольных треугольниках с гипотенузами AH и BC. Но $\angle C_1A_2B_1 = 2\angle C_1AB_1 = 90°$. Значит, ромб $A_0C_1A_2B_1$ – квадрат.

12. Закрасим все квадратики 2×2 синим. Получится одна или несколько синих фигур, возможно с дырками. Суммарный периметр синих фигур чётен, так как периметр каждого квадратика чётен, а при стыковке двух квадратиков из их суммарного периметра вычтутся две одинаковые части. Часть периметра, которая выходит на границу прямоугольника, тоже чётна. Но тогда и та часть периметра, которая лежит внутри, чётна. Она состоит в точности из тех сторон клеточек, на которые надо класть доминошку.

13. Ответ: можно. Если муха на линии сетки, то по ней попали. Положим мухобойку так, чтобы какие-то две мухи попали на одну линию сетки, назовём это направление горизонтальным. Сдвинем мухобойку вдоль этой линии так, чтобы хоть одна из оставшихся мух попала на вертикальную линию сетки. Оставшиеся три мухи сидят в каких-то клетках. Если хотя бы две из них чёрные – задача решена. Если хотя бы две из них белые, сдвинем мухобойку по горизонтали на одну клетку – две из трёх оставшихся мух попадут в чёрные клетки, а три первые мухи останутся на линиях.

14. Ответ: 159. Пусть даны 159 чисел. Среди них найдутся числа с одной и той же левой частью и либо окончаниями 00, 01, ..., 79, либо окончаниями 20, 21, ..., 99. Но суммы $0+0$, $0+1$, ..., $7+9$ дают всевозможные остатки от деления на 17, и суммы $2+0$, $2+1$, ..., $9+9$ тоже. Поэтому среди наших чисел найдётся искомое.

Но ни у одного из 158 чисел $10^{15}-79$, $10^{15}-78$, ..., $10^{15}+78$ сумма цифр не делится на 17.

15. Ответ: 200. Заметим, что n чётно: иначе сумма четырёх его наибольших делителей не больше $n+n/3+n/5+n/7<2n$. Аналогично, n кратно 3, так как $n+n/2+n/4+n/5<2n$. Тогда четвёртый наибольший делитель у n равен $2n-n-n/2-n/3=n/6$. Поэтому n не делится на 4 и 5. Но любое n, кратное 6 и не кратное 4 и 5, подходит. Чисел от 1 до 3000, кратных 6, всего 500. Из них 250 кратны 4, 100 кратны 5, 50 кратны $4\cdot5$ поэтому ответ: $500-250-100+50$.

16. Ответ: $(-2,-2,-2)$. Ввиду первого равенства b^2 делится на a^2, тогда b делится на a. Аналогично, c делится на b и a делится на c, откуда $|a|=|b|=|c|$. Если $a=b=c$, то $a^3+2a^2=0$ и $a=-2=b=c$. Если же, например, $a=-b$, сложим первые два равенства, получим $a^2+2b^2+c^2=0$, откуда $a=b=c=0$, что противоречит условию.

17. Ответ: да. Подойдёт $2^{2021}+0{,}5$. Пусть на доске записано число $N+0{,}5$. Если N нечётно, то через минуту на доске появится целое число. А если двоичная запись у N оканчивается на k нулей, то через минуту их станет на 1 меньше.

18. Ответ: да. После смешивания на место k попадает число, имевшее номер $3k$, после следующего смешивания – число, имевшее изначально номер $3^2\cdot k$, и т.д. (номера, большие $3n$, заменяем их остатками от деления на $3n+1$).

Мы хотим, чтобы на месте k оказалось число, имевшее номер $193-k$. Но $192k$ как раз даёт при делении на 193 остаток $193-k$ (ведь $192k-(193-k)=193k-193$ кратно 193). Осталось найти такое t, чтобы 3^t давало при делении на 193 остаток 192. Убедитесь, что подходит $t=8$.