



ПРО ЛЁЛЮ И МИНЬКУ,

А ТАКЖЕ ПРО ЛЕММУ ШПЕРНЕРА И ДВА ЕЁ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА –
ОДНО СКАЗОЧНОЕ, А ДРУГОЕ РЕЗИНОВОЕ

Часть 1. Лемма Шпернера для отрезка

Когда мне, дети, ударило семь лет, я уже умел хорошо считать и даже отлично понимал, что такое чётные и нечётные числа, знал про треугольники, отрезки и квадраты.

А моей сестрёнке Лёле было в то время десять лет. Она была исключительно бойкая девочка и ходила не только в школу, но и на кружок по математике.

Она мне однажды сказала:

– Минька, мама ушла на кухню. Давай поиграем в новую интересную игру, которой меня научили на кружке.

Вот мы садимся за стол, и Лёля рисует на листке бумаги отрезок с десятью отмеченными точками. Причём **крайние точки покрашены – одна в красный, а другая в синий цвет** (рис. 1).



Рис. 1

Лёля говорит:

– Будем с тобой по очереди красить отмеченные точки на отрезке. За один

ход можно покрасить любую из неокрашенных отмеченных точек в красный или синий цвет. Когда все точки покрасим, посчитаем число маленьких отрезков с разноцветными концами. Если это число окажется чётным, ты выиграл. А если нечётным, то я выиграла. Чур, я хожу первая.

И вот Лёля берёт карандаш и моментально красит одну из точек. И я тоже крашу одну из точек. Игра быстро заканчивается, и я проигрываю, так как число отрезков с разноцветными концами равно трём, а три – число нечётное:



Рис. 2

Я говорю:

– Давай сыграем ещё! Только я, Лёлица, теперь первым буду ходить.

Лёля моментально рисует новый отрезок, теперь с семью отмеченными точками, и мы начинаем игру. И я

Если вы не знаете, кто такие Лёля и Минька, рекомендуем цикл рассказов М.М. Зощенко. Он так и называется: «Лёля и Минька».



опять проигрываю. И ещё два раза проигрываю. Мне становится так обидно, что я начинаю плакать.

Задача 1. Попробуйте сами поиграть в такую игру. Нет ли в ней подвоха?

Тут в нашу комнату входит папа и говорит:

– Лёля, это нечестная игра! С такими правилами ты всегда будешь выигрывать.

Папа уходит в свой кабинет, некоторое время ходит из угла в угол, а потом подзывает меня к себе и говорит:

– Видишь ли, я думаю, что у Лёли на кружке учитель рассказывал *лемму Шпернера для отрезка*.

Лемма Шпернера для отрезка говорит нам, что сколько бы точек на отрезке мы ни отметили и как бы мы ни раскрашивали эти точки в красный и синий цвет, соблюдая наши правила, число маленьких отрезков с разноцветными концами всегда нечётно.

Давай вместе докажем эту лемму, она несложная. Представь себе, что

отрезок – это дорога и мы идём с тобой по ней от красного конца к синему. При этом мы считаем, сколько раз поменяется цвет точек, мимо которых мы проходим.

Сначала цвет меняется с красного на синий, потом с синего на красный, потом опять с красного на синий и так далее, строго по очереди. То есть каждая *нечётная переменная цвета* – с красного на синий, а каждая *чётная* – с синего на красный.

Я говорю:

– Ну ясно, папа, последняя переменная цвета будет с красного на синий, потому что последняя точка – синяя. То есть последняя переменная цвета нечётная! А считать перемены цвета – это то же самое, что считать число отрезков с разноцветными концами! Я понял!

Папа говорит:

– Сейчас я расскажу тебе секретное рассуждение, его Лёля не знает. Вот смотри, пусть наш отрезок – это резинка с раскрашенными отмеченными



ми точками. Давай вобъём в землю два столбика, красный и синий, и натянем нашу резинку концами на столбики. Красный конец прикрепим к красному столбику, а синий – к синему. Садись-ка, Минька, на землю между столбиков и смотри вверх. Резинку видишь? Сколько в ней слоёв?

Я говорю:

– Вижу резинку в один слой!

Папа говорит:

– А теперь будем эту резинку натягивать дальше, закрепляя все красные точки на красный столбик, а синие – на синий. Будто на столбиках прикреплены маленькие крючки, а на отмеченных точках на резинке – петельки. И мы просто надеваем петельки на крючки. Смотри, отрезки с концами одного и того же цвета стянулись, сделались совсем короткими. Отрезки с разноцветными концами – наоборот, растянулись и заняли весь промежуток между столбиками. Что происходит у тебя над головой?

Я говорю:

– Вижу, как над моей головой проплывают складки резинки! Каждый раз, когда проходит складка, число слоёв меняется на два!

Папа говорит:

– Наконец мы закрепили все цветные точки на столбиках. Сколько слоёв резинки у тебя над головой теперь?

Я говорю:

– Ровно столько же, сколько отрезков с разноцветными концами! Ага, кажется, я понял! Вначале число слоёв было равно единице, но потом с каждой складкой оно менялось на чётное число. Значит, всё время у меня над головой было нечётное число слоёв, и в конце тоже!

– Молодец, Минька, – говорит папа, – запомни это рассуждение. Мало ли ещё каким хитростям научат Лёлю на кружке...

Папа как в воду глядел... На другой день Лёля говорит:

– Минька, мы прошли на кружке новую игру. Интересную! Давай играть.

О новой игре мы напишем в следующем номере «Квантика»