XLIV ТУРНИР ГОРОДОВ

ОСЕННИЙ ТУР, 8-9 КЛАССЫ

9 и 23 октября 2022 года состоялся осенний тур XLIV Турнира Городов – международного математического соревнования для школьников. Приводим базовый и сложный варианты для 8–9 классов. В скобках после номера задачи указано число баллов, присуждавшихся за её полное решение. При подведении итогов у каждого участника учитываются три задачи, по которым он набрал больше всего баллов (баллы за пункты одной задачи суммируются).

Базовый вариант

1 [3]. Можно ли расставить в клетках таблицы 6×6 числа, среди которых нет одинаковых, так, чтобы в каждом прямоугольнике 1×5 (как вертикальном, так и горизонтальном) сумма чисел была равна 2022 или 2023?

Егор Бакаев

2 [4]. Существует ли натуральное число, которое можно представить в виде произведения двух палиндромов более чем 100 способами? (Палиндромом называется натуральное число, которое одинаково читается как слева направо, так и справа налево.)

Егор Бакаев

3 [5]. Пятиугольник $ABCDE$ описан около окружности. Углы при его вершинах A, C и E равны 100°. Найдите угол ACE.

Михаил Евдокимов

4 [5]. Можно ли раскрасить все натуральные числа, большие чем 1, в три цвета (каждое число – в один цвет, все три цвета должны использоваться) так, чтобы цвет произведения любых двух чисел разного цвета отличался от цвета каждого из сомножителей?

Михаил Евдокимов

5 [5]. У Пети есть 8 монет, про которые он знает только, что 7 из них настоящие и весят одинаково, а одна фальшивая и отличается от настоящей по весу, неизвестно в какую сторону. У Васи есть чашечные весы – они показывают, какая чашка тяжелее, но не

показывают, насколько. За каждое взвешивание Петя платит Васе (до взвешивания) одну монету из имеющихся у него. Если уплачена настоящая монета, Вася сообщит Пете верный результат взвешивания, а если фальшивая, то случайный. Петя хочет определить 5 настоящих монет и не отдать ни одну из этих монет Васе. Может ли Петя гарантированно этого добиться?

Александр Грибалко, Алексей Заславский

Сложный вариант

1 [4]. Сто друзей, среди которых есть Петя и Вася, живут в нескольких городах. Петя узнал расстояние от своего города до города каждого из оставшихся 99 друзей и сложил эти 99 чисел. Аналогично поступил Вася. Петя получил 1000 км. Какое наибольшее число мог получить Вася? (Города считайте точками плоскости; если двое живут в одном и том же городе, расстояние между их городами считается равным нулю.)

Борис Френкин

2. Для каждого из чисел 1, 19, 199, 1999 и т.д. изготовили одну отдельную карточку и записали на неё это число.

а) [2] Можно ли выбрать не менее трёх карточек так, чтобы сумма чисел на них равнялась числу, все цифры которого, кроме одной, – двойки?

б) [3] Пусть выбрали несколько карточек так, что сумма чисел на них равна числу, все цифры которого, кроме одной, – двойки. Какой может быть его цифра, отличная от двойки?

Сергей Маркелов

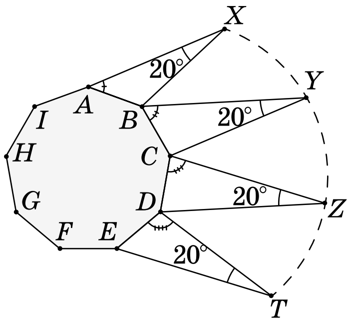
3 [6]. Барон Мюнхгаузен утверждает, что нарисовал многоугольник и точку внутри него так, что любая прямая, проходящая через эту точку, делит этот многоугольник на три многоугольника. Может ли барон быть прав?

Татьяна Казицына

4 [7]. Пусть $n > 1$ – целое число. В одной из клеток бесконечной белой клетчатой доски стоит ладья. Каждым ходом она сдвигается по доске ровно на n клеток по вертикали или по горизонтали, закрашивая пройденные n клеток в чёрный цвет. Сделав несколько таких ходов, не проходя никакую клетку дважды, ладья вернулась в исходную клетку. Чёрные клетки образуют замкнутый контур. Докажите, что число белых клеток внутри этого контура даёт при делении на n остаток 1.

Александр Грибалко

5 [9]. На сторонах правильного девятиугольника $ABCDEFGHI$ во внешнюю сторону построили треугольники XAB, YBC, ZCD и TDE. Известно, что углы X, Y, Z, T этих треугольников равны 20° каждый, а среди углов XAB, YBC, ZCD и TDE каждый следующий на 20° больше предыдущего. Докажите, что точки X, Y, Z, T лежат на одной окружности.



Егор Бакаев

6 [10]. Петя прибавил к натуральному числу N натуральное число M и заметил, что сумма цифр у результата та же, что и у N. Тогда он снова прибавил M к результату, потом – ещё раз, и т.д. Обязательно ли он когда-нибудь снова получит число с той же суммой цифр, что и у N?

Александр Шаповалов

7. Известно, что среди нескольких купюр, номиналы которых – попарно различные натуральные числа, есть ровно N фальшивых. Детектор за одну проверку определяет сумму номиналов всех настоящих купюр, входящих в выбранный нами набор. Докажите, что за N проверок можно найти все фальшивые купюры, если

а) [3] $N=2$; **б) [8]** $N=3$.

Сергей Токарев

Художник Сергей Чуб