Эллипс, гипербола и парабола

Математические сюрпризы

Фёдор Нилов

В этой статье мы познакомимся с эллипсом, гиперболой и параболой. Посмотрим, чем они похожи, а чем отличаются.

Мы хорошо знаем, что все точки окружности находятся на одинаковом расстоянии от её центра. *Эллипс*, который можно представлять себе как сплющенную окружность, обладает похожим свойством. Внутри эллипса есть две точки, которые называются его *фокусами*: сумма расстояний от них до любой точки эллипса одна и та же (рис. 1). Иначе говоря, если привязать нерастяжимую верёвку к двум колышкам и прикрепить ошейник козы к этой верёвке, то коза сможет дотянуться до травы на лужайке, граница которой – эллипс. Если фокусы у эллипса совпадают, он превращается в окружность.

У *гиперболы* тоже есть два фокуса, но для всех её точек постоянна *разность* расстояний до фокусов (из большего вычитаем меньшее). Таким образом, гипербола состоит из двух ветвей: если расстояние до одного фокуса больше, точка лежит на одной ветви, иначе – на другой (рис. 2).

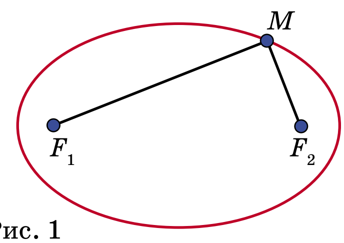


Рис. 1

Бифокальное определение эллипса: MF_1+MF_2 постоянно

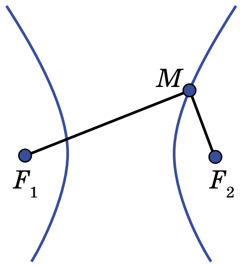


Рис. 2

Бифокальное определение гиперболы: $|MF_1-MF_2|$ постоянно

Покажем, что эллипс и гипербола – симметричные фигуры. Отразим точку, лежащую на эллипсе, относительно прямой, проходящей через его фокусы (рис. 3). Расстояния до фокусов не изменятся, поэтому сохранится и их сумма. Значит, отражённая точка тоже лежит на эллипсе, а прямая, проходящая через фокусы, – это ось

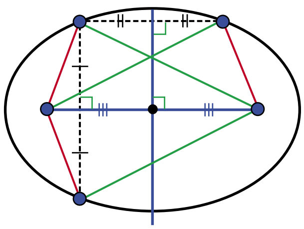


Рис. 3

симметрии эллипса. Вторая ось симметрии – серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему фокусы. При симметрии относительно этой оси расстояния до фокусов меняются местами.

Гипербола также имеет две оси симметрии: одна проходит через фокусы, а другая является серединным перпендикуляром к отрезку, соединяющему фокусы (рис. 4). У эллипса и гиперболы есть и центр симметрии – середина отрезка, соединяющего фокусы.

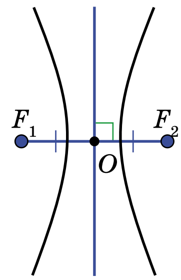


Рис. 4

Парабола образована всеми точками плоскости, расстояние от которых до фиксированной точки (*фокуса*) равно расстоянию до фиксированной прямой (*директрисы*)[1]. Парабола имеет лишь одну ось симметрии, она проходит через фокус и перпендикулярна директрисе (рис. 5).

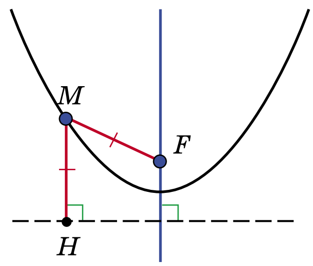


Рис. 5

Определение параболы заметно отличается от определений эллипса и гиперболы. Оказывается, для всех трёх кривых можно дать одно общее определение. Зафиксируем прямую d (она будет директрисой) и не лежащую на ней точку F (это будет фокус), а затем выберем любое положительное число ε, которое назовём *эксцентриситетом*. Рассмотрим все точки M, для которых отношение расстояния до фокуса к расстоянию до директрисы равно ε. Если $\varepsilon < 1$, получится эллипс, если $\varepsilon > 1$ – гипербола, а если $\varepsilon = 1$ – парабола (зелёная, красная и синяя фигуры на рисунке 6).

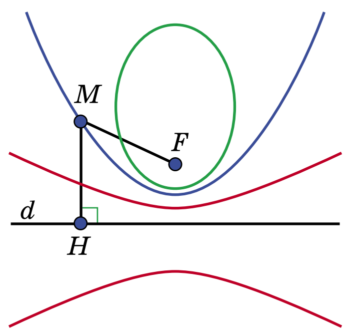


Рис. 6. Фокально-директориальное определение эллипса, гиперболы и параболы, $MF : MH = \varepsilon$

Оказывается, для каждого из двух фокусов гиперболы и эллипса есть своя директриса, а фокусы в би-

[1] См. также статью Д. Русаковой в № 12 за 2015 год.

фокальном и фокально-директориальном определениях – это одни и те же точки (рис. 7).

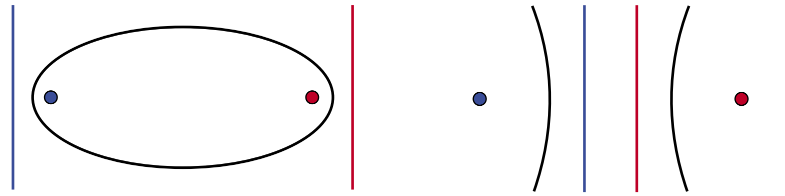
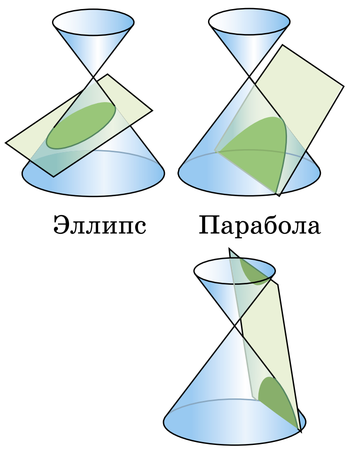


Рис. 7

Если эксцентриситет ε близок к нулю, эллипс становится похож на окружность. Если ε очень большой, ветви гиперболы становятся похожими на директрисы.

Эллипсы, гиперболы и параболы называют одним общим термином: *кониками* или *коническими сечениями*, поскольку каждая из этих кривых может быть получена как сечение конуса плоскостью[2] (рис. 8). По-видимому, этот факт впервые обнаружил древнегреческий математик Менехм в IV веке до н. э., а первое сохранившееся доказательство появилось в монографии «Конические сечения» Аполлония Пергского в III веке до н.э.[3]

Коники зачастую встречаются в окружающей жизни. Верхний край кружки выглядит как эллипс, если на неё посмотреть под углом. Струи фонтана имеют форму параболы. След фонаря на тёмной поверхности – коника (это как раз сечение светового конуса). Большинство небесных тел Солнечной системы, согласно закону Кеплера, вращаются по эллипсам с фокусом в Солнце. Некоторые кометы летят по параболам и ветвям гипербол.



Эллипс Парабола

Рис. 8 Гипербола

Кстати, сечение цилиндра наклонной плоскостью (другими словами, срез колбасы) – тоже эллипс.

В следующем номере мы обсудим, почему сечения конуса являются эллипсами, гиперболами и параболами, поймём, где находятся их фокусы и директрисы, а также рассмотрим различные обобщения.

[2] Об этом «Квантик» писал в №8 за 2013 год.

[3] См. книгу «Аполлоний Пергский», kvan.tk/apollonius

Художник Мария Усеинова