



## Два века теоремы Данделена

Ещё древние греки (например, Менехм и Аполлоний) знали, что эллипс, гиперболу и параболу можно получить, пересекая конус плоскостью. Но они, видимо, не знали чисто геометрического доказательства.

В 1822 году бельгийский инженер и математик Жерминаль Данделен такое доказательство придумал! Мы разберём его для случая цилиндра: любое сечение цилиндра наклонной плоскостью (не параллельной оси цилиндра) будет эллипсом.



Жерминаль Данделен

Оригинальная идея Данделена следующая: впишем в цилиндр две одинаковые сферы, касающиеся данной плоскости, одна – сверху (в точке  $P$ ), другая – снизу (в точке  $Q$ ), как на рисунке 1.

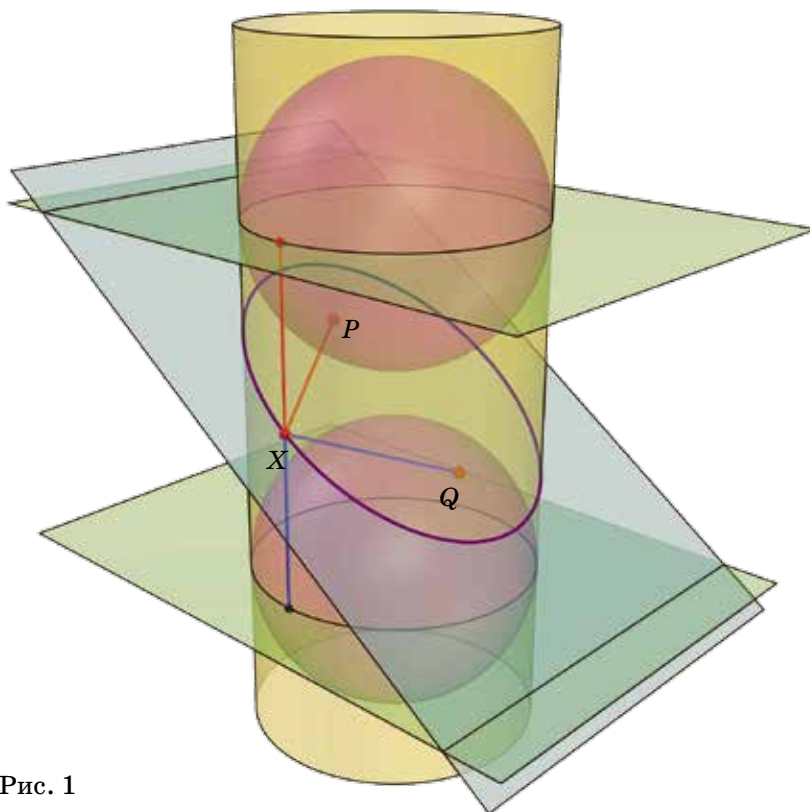


Рис. 1

Оказывается, сечение – это эллипс, фокусы которого – точки  $P$  и  $Q$ ! Действительно, возьмём какую-нибудь точку  $X$  на сечении. Расстояние  $XP$  равно вертикальному отрезку, соединяющему  $X$  с экватором верхней сферы – ведь это две касательные, проведённые к сфере из одной точки. Аналогично,  $XQ$  – расстояние от  $X$  до экватора нижней сферы. Поэтому сумма расстояний от  $X$  до точек  $P$  и  $Q$  всегда одна и та же: она равна расстоянию между экваторами сфер!

Аналогично можно доказать, что сечения конуса плоскостями, не проходящими через вершину, – это *коники*: эллипсы, гиперболы, параболы. Их фокусы – снова точки касания сфер Данделена с плоскостью сечения.

А как увидеть их директрисы? Точки касания сферы Данделена с конусом лежат в горизонтальной плоскости. Прямая, по которой эта горизонтальная плоскость пересекается с плоскостью сечения, и есть директриса (рис. 2). Это доказал в 1829 году ирландский математик Пирс Мортон.

В 1826 году Данделен заметил, что конструкцию со вписанными сферами можно применить и для *однополостного гиперболоида вращения* – эта поверхность получается вращением гиперболы относительно её оси симметрии, перпендикулярной линии фокусов (рис. 3). Снова сечения будут кониками, фокусы которых – точки касания сфер Данделена с плоскостью сечения, а директриса находится аналогично предыдущему случаю.

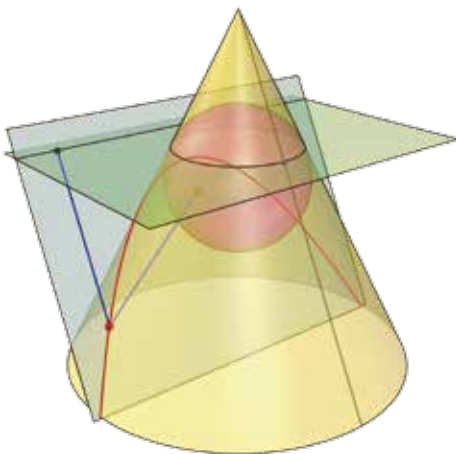


Рис. 2

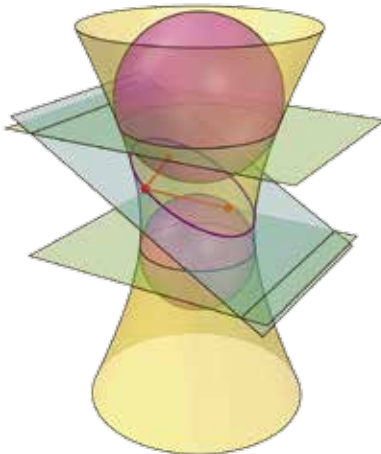


Рис. 3





Художник Мария Усеинова

Дело в том, что однополостный гиперболоид тоже можно получить, вращая вокруг оси прямую<sup>1</sup> (рис. 4). Поэтому работает практически такое же рассуждение, что и для цилиндра с конусом.

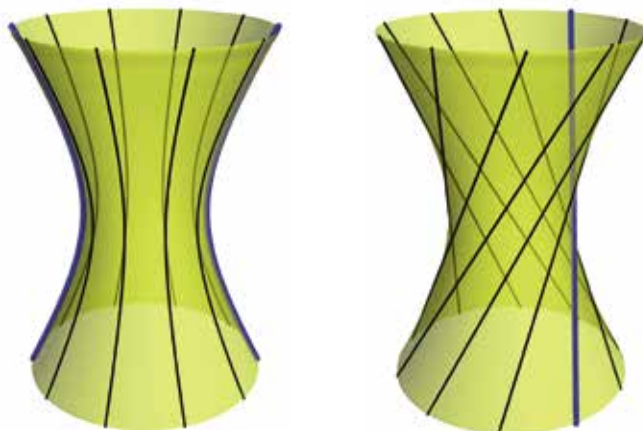


Рис. 4

На других поверхностях, получающихся вращением коники относительно одной из её осей симметрии, никаких прямых нет. Но теорема, аналогичная теореме Данделена, всё равно верна! Доказательство можно прочитать в статье автора в журнале «Квант», № 10 за 2022 год. На рисунке 5 показан случай эллипсоида; анимации и больше красивых картинок можно найти на сайте «Математические этюды».<sup>2</sup>

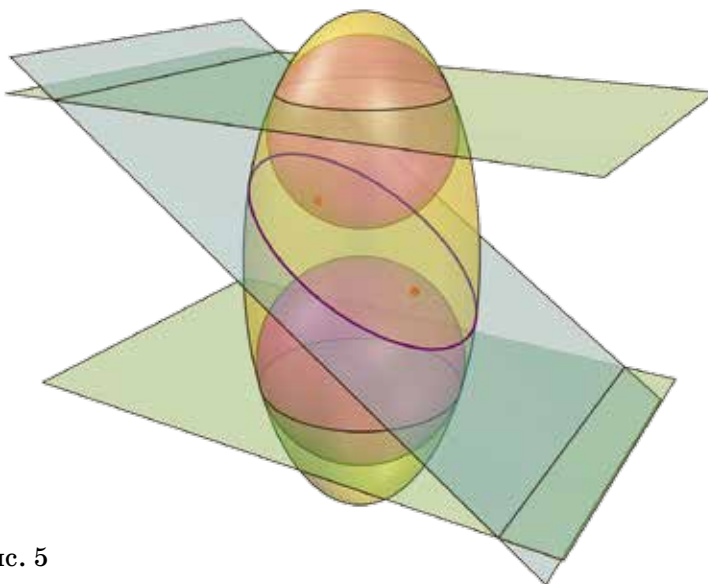


Рис. 5

<sup>1</sup> См. статью Н. Андреева и М. Прасолова «Линейчатые, но не плоские» в «Квантике» № 9 за 2021 год.

<sup>2</sup> См. [kvan.tk/dandelin-etudes](http://kvan.tk/dandelin-etudes)