Математический кружок

Александр Блинков

Окружность девяти точек

Познакомимся с одним из красивых фактов геометрии треугольника – теоремой об ***окружности девяти точек***, называемой ещё ***окружностью Эйлера***.

Теорема. *Середины сторон треугольника, основания его высот и середины отрезков, соединяющих ортоцентр (точку пересечения высот) с вершинами треугольника, лежат на одной окружности (рис. 1).*

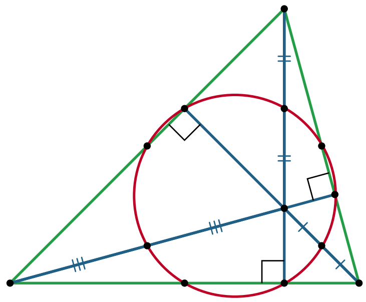


Рис. 1

Мы приведём один из самых простых способов её доказать. Нам понадобятся несколько фактов из школьного курса геометрии:

1. Средняя линия треугольника параллельна его стороне (рис. 2).

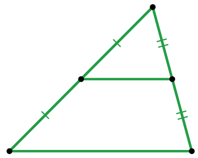


Рис. 2

2. Две прямые, соответственно параллельные перпендикулярным прямым, перпендикулярны (рис. 3).

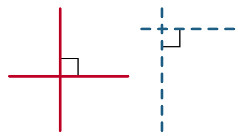


Рис. 3

3. Точка C лежит на окружности с диаметром AB тогда и только тогда, когда угол ACB прямой (рис. 4).

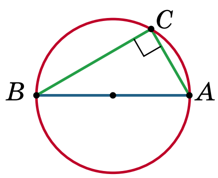


Рис. 4

4. Диагонали прямоугольника являются диаметрами его описанной окружности (рис. 5).

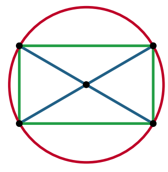


Рис. 5

Теперь мы готовы доказать теорему.

Доказательство. Рассмотрим остроугольный треугольник ABC и его высоты, пересекающиеся в точке H (чтобы не загромождать чертёж, полностью проведём только высоту BB_1). Пусть K и L – середины сторон AB и AC, а P и Q – середины отрезков BH и CH (рис. 6*а*).

Заметим, что KL – средняя линия треугольника BAC, значит, $KL \parallel BC$, а PQ – средняя линия треугольника BHC, значит, $PQ \parallel BC$. Поэтому $KL \parallel PQ$. Аналогично, KP и LQ – средние линии треугольников ABH и ACH, поэтому $KP \parallel AH \parallel LQ$. Тогда стороны четырёхугольника $KLQP$ соответственно параллельны перпендикулярным прямым BC и AH, то есть $KLQP$ – прямоугольник.

Рассмотрим окружность, описанную около $KLQP$, его диагонали – диаметры этой окружности. Угол PB_1L, опирающийся на диаметр PL, прямой, поэтому B_1 тоже лежит на этой окружности.

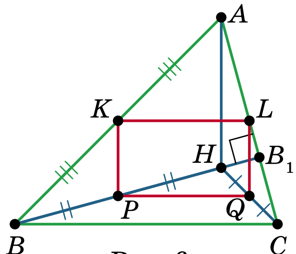


Рис. 6а

Таким образом, уже доказано, что пять из девяти точек лежат на одной окружности.

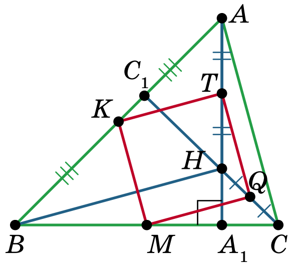


Рис. 6б

Рассмотрим теперь вместо точек L и P середины M и T отрезков BC и AH, а вместо точки B_1 – основание A_1 высоты, проведённой из вершины A (рис. 6б). Аналогично доказывается, что $KMQT$ – прямоугольник. Но он имеет общую диагональ KQ с прямоугольником $KLQP$, поэтому их описанные окружности совпадают, то есть M и T лежат на нашей окружности. Точка A_1 лежит на ней же, так как диаметр TM виден из A_1 под прямым углом.

Осталась последняя точка: основание C_1 высоты, проведённой из вершины C, которая лежит на той же окружности, так как $\angle KC_1Q = 90°$ (KQ – диаметр).

Случай остроугольного треугольника разобран. Прямоугольники $KLQP$ и $KMQT$ часто называют ***прямоугольниками Эйлера***. Понятно, что существует ещё один такой прямоугольник: $LMPT$.

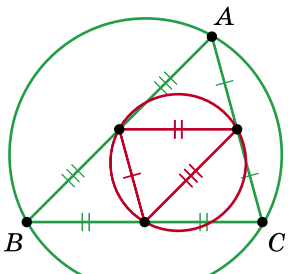
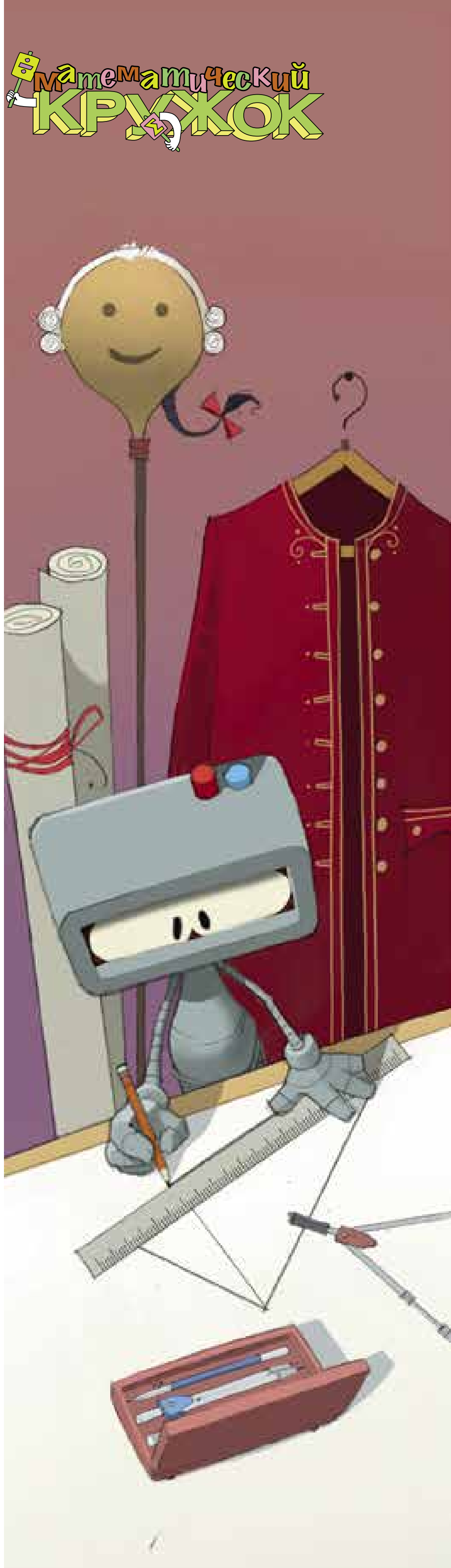
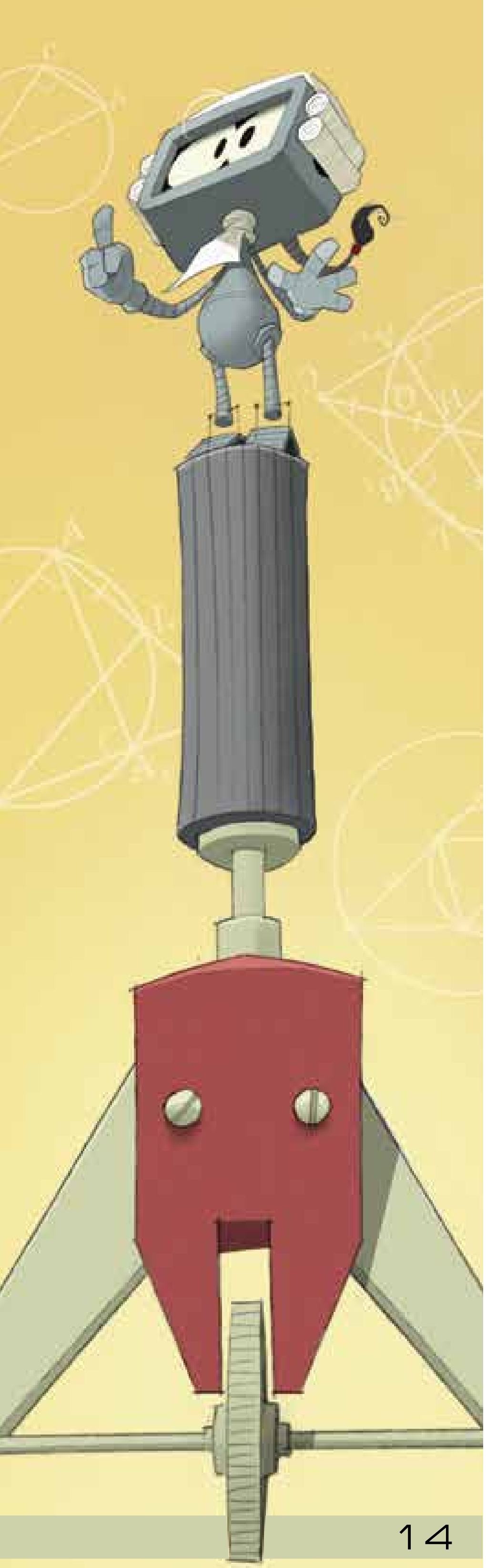


Рис. 7

Найдём теперь радиус окружности девяти точек. Пусть R – радиус описанной окружности треугольника ABC. Заметим, что серединный треугольник (его вершины – середины сторон ABC) вписан в окружность девяти точек (рис. 7). Но его стороны в два раза меньше сторон исходного, поэтому он подобен треугольнику ABC с коэффициентом 0,5. Значит, радиус окружности девяти точек равен $0{,}5R$.

Отметим, что мы доказали теорему для остроугольного треугольника. Нужно ли отдельно рассматривать случай тупоугольного треугольника? Для ответа на





этот вопрос заметим, что если H – ортоцентр остроугольного треугольника ABC, то A – ортоцентр тупоугольного треугольника BHC (рис. 8). Действительно, HA_1, BC_1 и CB_1 – высоты треугольника BHC. При этом у треугольника BHC та же самая окружность девяти точек, так как середины K и L сторон AB и AC просто меняются «ролями» с серединами P и Q отрезков BH и CH, а «роли» остальных точек не меняются!

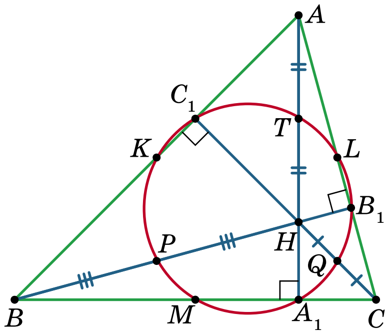


Рис. 8

Точки A, B, C и H, любая из которых является ортоцентром треугольника, образованного тремя другими, обычно называют ***ортоцентрической четвёркой***. Таким образом, у четырёх треугольников ABC, BHC, AHB и AHC окружность девяти точек одна и та же.

Разберём, наконец, случай прямоугольного треугольника ABC ($\angle A = 90°$). Проведём окружность через середины K, L и M его сторон и убедимся, что она соответствует окружности девяти точек (рис. 9).

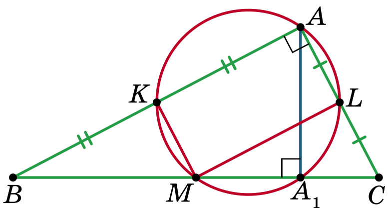


Рис. 9

Действительно, $KMLA$ – прямоугольник, поэтому эта окружность проходит через вершину A. То, что на окружности лежит основание A_1 высоты, доказывается как и выше. Но точек всего пять, где же остальные?

Их и не должно быть. Ведь A – ортоцентр треугольника, в этой точке совпадают основания двух высот и она же – «вырожденная» середина отрезка, соединяющего эту вершину с ортоцентром. А середины K и L сторон AB и AC совпадают с серединами отрезков, соединяющих вершины B и C с ортоцентром.

Напоследок вернёмся к случаю непрямоугольного треугольника. Как мы видели, шесть из девяти точек на окружности Эйлера разбиваются на три пары диаметрально противоположных. Выберем любую из этих шести точек и найдём расстояния до оставшихся трёх точек. Докажите, что два расстояния из трёх совпадут.

Художник Алексей Вайнер