Алексей Толпыго

Давайте что-нибудь прибавим...

В этой небольшой заметке рассматривается один забавный способ решения задач (главным образом – задач на делимость). Я начну с так называемой «задачи Дирака», текст (и квази-решение) приведу по статье известного советского физика Березинского[1].

«Три рыбака ловили рыбу на уединённом острове. Рыба бодро клевала наживку, рыбаки увлеклись и не заметили, что пришла ночь и спрятала под своим покровом гору наловленной рыбы. Пришлось заночевать на острове. Двое рыбаков быстро заснули, каждый прикорнув под своей лодкой, а третий, немного подумав, понял, что у него бессонница, и решил уехать домой. Своих товарищей он не стал будить, а разделил всю рыбу на три части. Но при этом одна рыба оказалась лишней. Недолго думая, он швырнул её в воду, забрал свою часть и уехал домой.

Среди ночи проснулся второй рыбак – он торопился в другую задачку. Он не знал, что первый рыбак уже уехал, и тоже поделил всю рыбу на три равные части, и конечно, одна рыба оказалась лишней. Оригинальностью и этот рыбак не отличался – закинул он её подальше от берега и со своей долей поплёлся к лодке.

Третий рыбак проснулся под утро. Не умывшись и не заметив, что товарищей уже нет, он побежал делить рыбу. Разделил её на три равные части, швырнул одну лишнюю рыбу в воду, забрал свою долю и был таков.

В задаче спрашивалось, какое наименьшее количество рыб могло быть у рыбаков.

Дирак[2] предложил такое решение: рыб было минус две. После того как первый рыбак совершил антиобщественный поступок, швырнув одну рыбу в море, их стало $(-2)-1=-3$. После этого он ушёл, тяжело отдуваясь и унося под мышкой минус одну рыбу. Рыб стало $(-3)-(-1)=-2$. Второй и третий рыбаки просто повторили нехороший поступок своего товарища».

... А теперь подумаем, как на самом деле нужно решать эту задачу.

---

[1] Пути в незнаемое. Писатели рассказывают о науке. Сборник 3. М.: Советский писатель, 1963.

[2] Поль Дирак – знаменитый физик-теоретик, «отец» квантовой механики.

Если б не было условия о «лишних» рыбах и число рыб каждый раз нацело делилось на 3, то решение почти очевидно. Достаточно (и необходимо), чтобы число рыб делилось на 3^3: например, если рыб было 27, то после первого дележа останется 18, после второго 12 и после третьего 8. Но это решение неправильное, так как не соответствует условию задачи.

С другой стороны, решение Дирака математически верно и, более того, является наилучшим (оно обобщается на любое число рыбаков), но, к сожалению, не имеет никакого смысла.

Как же быть? Очень просто: надо эти два решения **сложить.** Имеем: $(-2)+27=25$. Действительно, теперь получается, что одна рыба была лишней, первый рыбак её выбросил, забрал 8 – осталось 16. Второй забрал 5 и осталось 10; третий забрал 3.

Выходит, «нелепое» решение Дирака помогает решить задачу. Общий же ответ таков: число рыб должно было равняться $(-2)+N$, где N делится на 27. То есть рыб могло быть 25, 52, 79 и т. д.

Оказывается, способ «сложим бессмысленное решение с неправильным и получим верное» годится для разных задач. Приведём несколько примеров.

Задача 1. Найти 99 последовательных натуральных чисел, из которых первое делится на 100, второе делится на 99, ..., последнее делится на 2.

Очевидно, годятся числа -100, -99, -98, ... , -2. К сожалению, они не натуральные. Поправим положение, добавив слагаемое, делящееся на все эти числа, например, $100!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot100$. Получаем ответ (не единственный и не наименьший, но самый простой): подходят числа $100!-100$, $100!-99$, ..., $100!-2$.

Задача 2. Найти 5 последовательных натуральных чисел, из которых первое делится на 3, второе на 5, затем на 7, 9 и 11.

Годятся числа 3/2, 5/2, 7/2 и т. д. (ряд можно продолжить неограниченно). С делимостью всё в порядке, вот только и числа, и частные полуцелые. Поправим положение, добавив к каждому числу $\frac{3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11}{2}$ (впрочем, достаточно взять $\frac{5\cdot7\cdot9\cdot11}{2}=1732\frac{1}{2}$).

Примерно тем же способом решается ещё одна известная задача – «задача про полчеловека».

Задача 3. По городу ехал автобус, в нём было несколько пассажиров. На первой остановке вышла половина всех пассажиров и ещё полчеловека. На второй вышла половина всех оставшихся пассажиров и ещё полчеловека. То же самое произошло на третьей остановке, после чего в автобусе не осталось ни одного пассажира. Сколько их было вначале?

Тут, правда, прибавлять ничего не нужно; главная трудность – в этом «полчеловеке», который создаёт впечатление бессмысленности условия. На самом же деле надо просто решить три линейных уравнения:

$$\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}=y; \qquad \frac{1}{2}y-\frac{1}{2}=z; \qquad \frac{1}{2}z-\frac{1}{2}=0,$$

откуда $z=1$, $y=3$, $x=7$. И никаких «полчеловеков»! Просто половинка человека складывается с половиной числа пассажиров – и люди становятся целыми.

А если бы в задаче не было условия о том, что после трёх остановок в автобусе не осталось никого? Тогда проще всего было бы начать с решения $x=-1$ (в этом случае после каждого «выхода половины и ещё полчеловека» в автобусе по-прежнему был бы минус один пассажир), а общее решение получилось бы из него прибавлением кратного восьми: $x=7$, 15, 23...

Задача 4. Найти 100 последовательных чисел, из которых первое делится на 3, второе на 5, третье на 7, ..., последнее на 201.

Рассмотренные задачи – пока что просто головоломки. Но тот же метод применяется и в «серьёзной» математике. В частности, напомним известную теорему:

Теорема. Существует сколь угодно длинный (конечный) ряд из последовательных чисел: k, $k+1$, $k+2$, ..., $k+n$, в котором все числа составные.

Воспользуемся сначала таким определением составного числа: m составное, если оно делится на какое-нибудь число, большее 1. При таком определении доказательство очевидно: берём ряд 2, 3, 4, ... (сколь угодно большой длины); в нём 2 делится на два, 3 – на три и т. д. Выходит, все числа составные, а простых вообще не существует – как же так? Ошибка в том, что в нашем «определении» мы забыли упомянуть очень важную вещь: «делится, *и частное больше* 1».

Но это можно поправить уже известным нам способом! Возьмём именно этот ряд чисел и добавим к нему что-нибудь, делящееся на все нужные нам числа. Допустим, например, что мы хотим получить ряд из составных длины 1000; итак, берём натуральные числа от 2 до 1001 включительно и добавим к ним, например, число $1001! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 1001$. Делимость на все числа от 2 до 1001 при этом не нарушается, а все частные стали больше 1, так что это доказательство уже вполне корректно.

Замечание. Вовсе не обязательно начинать с двойки. Можно, например, взять целые числа от 1001 до 2000; только добавлять придётся уже другое число.

Ещё один пример – поиск чисел *харшад*. Так называются целые числа, которые больше 10 и делятся на сумму своих цифр (например, 224, 506 и т.п.) [3].

Задача 5. Найти 5 последовательных чисел харшад.

Если числа идут по порядку, то и их суммы цифр тоже, пока не произойдёт «перескок» в разряде. Поэтому нетрудно подобрать числа, делящиеся на последовательные; например, 30, 31, 32, ..., 39, они делятся сами на себя. Беда только в том, что делители не те: нужно, чтобы они делились не на 30, 31, ..., а на 3, 4, ... – на числа, которые на 27 меньше.

Но это и подсказывает решение. Надо к этим числам добавить что-то, делящееся на 30, 31 и т. д., с суммой цифр 27. После некоторых усилий обнаруживаем, что подходит, например, 15 651 900 000. Тогда искомые числа – это 15 651 900 030, 15 651 900 031 и т.д.

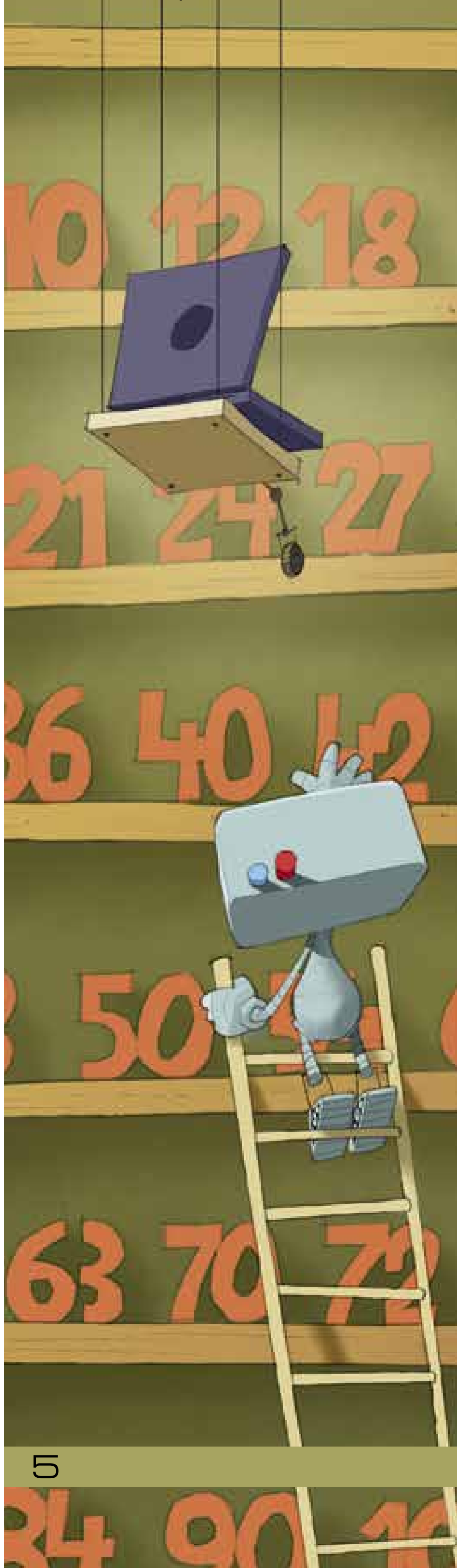
Задача 6. Найдите 5 последовательных чисел, из которых первое делится на 2, второе на 5, третье на 8, четвёртое на 11 и пятое на 14.

Задача 7. Найдите 10 чисел харшад подряд.

(*Указание*: начинать надо не с 30, а с числа побольше, например с числа 120.

Замечание. Найти подряд более 10 чисел уже несравненно труднее – из-за «перескока» в разрядах; более того, нетрудно доказать, что подряд может стоять не более 20 чисел харшад.)

[3] Слово «харша» заимствовано из санскрита и означает «великая радость»; название этим числам придумал индийский математик Д. Р. Капрекар. Несколько подробнее об этих числах рассказано в статье А. Толпыго «Числа харшад» в «Кванте» № 10 за 2020 год.



Художник Алексей Вайнер