НАШ КОНКУРС, VI ТУР

(«Квантик» № 2, 2023)

26. *На остановке останавливаются автобусы 3, 4 и 5, причём автобус № 3 ходит каждые 3 минуты, автобус № 4 – каждые 4 минуты, а автобус № 5 – каждые 5 минут. Аня заметила, что на остановку приходило по одному автобусу в 10:00, 10:01, 10:02, 10:03 и 10:05. Какой был номер у автобуса, приехавшего в 10:05, и почему?*

Ответ: № 4. Автобусы, пришедшие в 10:00, 10:01 и 10:02, имеют разные номера, поскольку между их прибытием проходило меньше 3 минут. То же самое можно сказать и про автобусы, приходившие в 10:01, 10:02 и 10:03. Значит, в 10:00 и 10:03 прибыли автобусы с одним и тем же номером – следовательно, это был № 3 (и больше Аня таких автобусов не видела). Тогда, с одной стороны, автобус в 10:05 имеет номер 4 или 5, а с другой – его номер совпадает либо с номером автобуса в 10:02, либо с номером автобуса в 10:01. Следовательно, в 10:05 приехал автобус № 4.

27. *Ребятам задали на дом вырезать из картона 5 тетраминошек, как на рисунке 1. Перед уроком Петя и Вася поняли, что неправильно записали задание и вырезали по пять пентаминошек. Фигурки Пети изображены на рисунке 2, а Васины – на рисунке 3. Сможет ли Петя отрезать по одной клетке от каждой своей фигурки так, чтобы в результате получился нужный набор? А сможет ли Вася? (Нарисуйте, какие клетки нужно отрезать, или объясните, почему получить нужный набор не удастся.)*

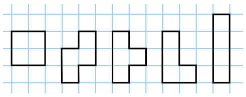


Рис. 1

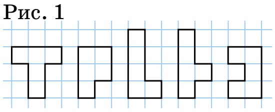


Рис. 2

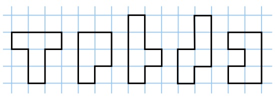
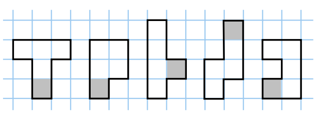


Рис. 3

Ответ: Вася сможет, а Петя – нет. Первые две тетраминошки Петя может вырезать только из одной своей фигурки (второй слева) и поэтому вырезать обе эти тетраминошки одновременно он не сможет. А у Васи всё получится: на рисунке закрашены клетки, которые ему нужно будет отрезать.



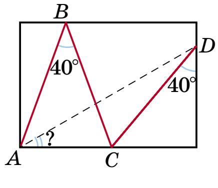
28. *Федя увидел в спортивном магазине гантели. Каждая гантель представляла собой два одинаковых стальных диска, насаженных на стержень. У разных гантелей диски были разного диаметра, но толщина всех дисков была одна и та же, и все стержни были одинаковыми. Увидев, что гантели с дисками диаметра 5 см весят 5 кг, а гантели с дисками диаметра 7 см весят 7 кг, Федя удивился: это не сходилось с известной ему формулой πR^2 для площади круга радиуса R. Разберитесь, что не учёл Федя, и найдите диаметр дисков у гантелей весом 13 кг.*

Ответ: Федя не учёл, что в вес каждой гантели, не важно какого радиуса, входит ещё один и тот же вес стержня; диаметр дисков у гантелей весом 13 кг равен 11 см. Диски гантелей диаметров 5 см и 7 см отличаются на «кольцо» шириной 2 см, а по весу такие гантели различаются на 2 кг. Значит, изменение веса гантелей на 2 кг соответствует изменению площади одного диска на площадь такого кольца, то есть на $\pi\cdot(7^2-5^2)=24\pi$. Гантели весом 13 кг тяжелее семикилограммовых гантелей на 6 кг, значит, площадь диска такой гантели будет на $3\cdot 24\pi=72\pi$ больше. То есть площадь диска равна $\pi\cdot(7^2+72)=\pi\cdot 121=\pi\cdot 11^2$, следовательно, радиус диска такой гантели равен 11 см.

29. *По шахматной доске 8×8 прошла хромая ладья (каждым ходом она переходила в клетку, соседнюю по стороне; возможно, в некоторые клетки она зашла несколько раз, а в некоторые не зашла совсем). Количество вертикальных ходов было вдвое больше, чем количество горизонтальных. Ладья начала движение в левом нижнем углу, а закончила в каком-то другом. В каком именно?*

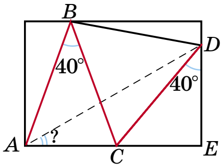
Ответ: в правом нижнем. Поскольку вертикальных ходов было вдвое больше горизонтальных, суммарное количество ходов вверх и вниз чётно. Но если хромая ладья оказалась в одном из верхних углов, то количество $В$ ходов вверх было на 7 больше количества $Н$ ходов вниз. Но тогда их сумма $В+Н=2Н+7$ нечётна – противоречие. В правый нижний угол ладья попасть могла, например, сделав 7 ходов вправо и 7 пар ходов вверх-вниз.

30. *Вершины ломаной $ABCD$ лежат на сторонах прямоугольника (см. рисунок). Все звенья ломаной равны, а два отмеченных на*



рисунке угла равны 40°. *Чему равен угол CAD?*

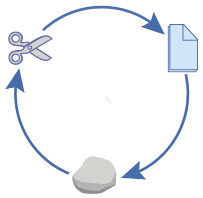
Ответ: 30°. Обозначим правую нижнюю вершину прямоугольника буквой E и проведём отрезок BD. Углы BAC и BCA при основании равнобедренного треугольника ABC равны $(180° - 40°) : 2 = 70°$, а угол DCE в прямоугольном треугольнике CDE равен $90° - 40° = 50°$. Значит, $\angle BCD = 180° - \angle ACB - \angle DCE = 180° - 70° - 50° = 60°$. Но треугольник BCD равнобедренный, а значит, и равносторонний. Тогда $BD = BC = BA$, и треугольник ABD – равнобедренный, причём $\angle ABD = \angle ABC + \angle CBD = 40° + 60° = 100°$. Значит, $\angle BAD = (180° - 100°) : 2 = 40°$, и, наконец, $\angle CAD = \angle CAB - \angle BAD = 70° - 40° = 30°$.



КАМЕНЬ, НОЖНИЦЫ, БУМАГА

(«Квантик» № 3, 2023)

Заметим, что камень, ножницы и бумага бьют друг друга «по кругу», как показано на рисунке (стрелочки, идущие по часовой стрелке, показывают, кто кого бьёт).



Пусть есть три человека A, B, C, которым мы выдаём эти предметы. Тогда люди A, B, C тоже будут бить друг друга по кругу по часовой стрелке. Но расставить людей по кругу можно лишь двумя способами: скажем, если мы ставим подряд по часовой стрелке A и B (и на оставшееся место – C), то у нас A бьёт B, B бьёт C, C бьёт A; если же ставим подряд по часовой стрелке B и A, то у нас B бьёт A, A бьёт C, C бьёт B.

А теперь поймём: что происходит, когда два человека меняются предметами? Если сначала, скажем, A бил B и они поменялись, то теперь B бьёт A. Значит, расстановка по кругу этих людей поменялась. Но фокусник знает, какая была расстановка изначально, а значит, знает и то, какова она теперь – ведь расстановок людей всего две! А этого достаточно: фокуснику не обязательно знать, кто именно поменялся и какие у кого на руках предметы – важно лишь, кто кого бьёт.

Поэтому фокусник может сделать верное предсказание, если знает, у кого что было изначально. Например, при чётном количестве обменов человек, у которого изначально был камень, будет бить того, у кого до обменов были ножницы, а при нечётном – того, у кого была бумага.

УЗНИКИ И ДВЕ МОНЕТКИ

(«Квантик» № 3, 2023)

Пусть один из узников называет то, что у него выпало, а другой – противоположное тому, что у него выпало. Тогда если у узников выпало одно и то же, угадает первый, а если выпало разное – угадает второй.

ДАВАЙТЕ ЧТО-НИБУДЬ ПРИБАВИМ

4. Годятся, например, числа, первое из которых равно $3/2 + 201!!/2$. Напомним, что через $n!!$ обозначается произведение всех нечётных чисел от 1 до n, если n нечётно, и произведение всех чётных чисел от 2 до n, если n чётно, то есть число $n(n-2)(n-4)\ldots$ и так далее, до двойки или единицы.

6. Годится, например, число 2054 и следующие за ним 4 числа.

7. Годится, например, 31-значное число $B0000120$ и 9 следующих за ним чисел, где $B = 322\,755\,373\,782\,527\,553\,737\,793$. (Требуется, чтобы B делилось на 121, 61, 41, 31, 63, 127 и 43.)

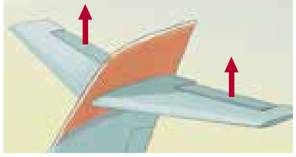
ЛЕГКО ЛИ СТАТЬ ДЕРЕВОМ

На спиле хорошо видны слои причудливо изогнутых проводящих тканей в стволе. Видно, что никаких годичных слоёв – вторичных тканей – в нём нет. На периферии ствола то тут, то там мы видим срезы старых черешков листьев, надолго остающихся на поверхности.

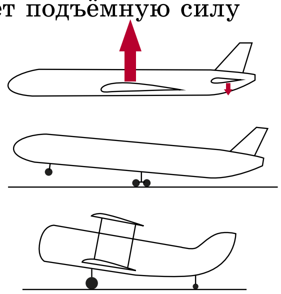
Но что это за тёмная масса волокон вокруг ствола и остатков листьев? Это воздушные корни, которые образуются на верху ствола, спускаются, тесно прижимаясь к нему, до земли и углубляются в почву. Корни, оплетая ствол, не только наращивают его толщину, но и подают воду к листьям, даже когда старые сосуды в самом стволе придут в негодность. Так что в каком-то смысле ствол диксонии всё-таки умеет нарастать в толщину. Только камбий тут совсем «не при делах».

САМОЛЁТНЫЕ ТОНКОСТИ

1. Пилоты поднимают горизонтальное оперение на хвосте. Из-за этого поток воздуха начинает сверху давить на хвост и самолёт откидывается на шасси

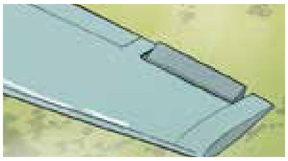


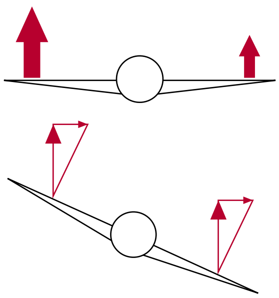
назад. Это резко увеличивает подъёмную силу крыльев и самолёт отрывается от земли. Мелкие «кукурузники», кстати, так не могут сделать, потому что уже упираются колесом на хвосте в землю, но они на земле всегда в положении сильно задранного носа. Большим лайнерам, в свою очередь, это решение бы не подошло: хочется, чтобы их салон был горизонтальным и в полёте, и стоя на земле.



2. Чтобы самолёт набрал высоту, ему нужно задрать нос. Так как крылья прилагают силу к центру самолёта, то, управляя только оперением на крыльях, пилоты не могут повернуть самолёт, задрав его нос или хвост. Нужно толкать за «край» самолёта, далеко от центра тяжести. Как и при взлёте, оперируя оперением на хвосте, пилоты создают давление на хвост, направленное вниз.

3. Оперение на концах крыльев (элероны) используется для заваливаний на бок и, как следствие, для изменения направления движения. Управляя элеронами, пилоты могут немного менять подъёмную силу крыла. Если одно крыло толкает самолёт вверх больше другого, он завалится на бок. Это заваливает и подъёмную силу, так что она теперь толкает самолёт не только вверх, но и вбок, позволяя ему поворачивать.





4. Зачем самолёт заваливается на бок, мы ответили в предыдущей задаче. Разберёмся, почему пассажиры не сваливаются вниз.

Какие силы действуют на самолёт и на пассажиров? Кажется, что пассажиры должны сваливаться из-за силы тяжести, но сила тяжести действует на самолёт и на пассажиров одинаково – так что если бы это была единственная действующая сила, то пассажиры бы ощущали невесомость и парили бы в салоне. Более-менее так и создают условия невесомости для разных опытов: самолёт летит с нулевой подъёмной силой и с тягой, компенсирующей сопротивление воздуха.

При нормальном полёте у самолёта ещё работают двигатели и действуют силы со стороны воздуха (сопротивление, подъёмная сила). Но ни одна из этих сил не стремится сместить пассажира влево или вправо по салону, а только вдавливают в кресло (двигатели в спинку кресла, подъёмная сила крыльев – в сиденье вниз).

XXXIV МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ПРАЗДНИК. Избранные задачи

1. Ответ: суммы равны. В обеих суммах в разряде единиц складываются цифры от 1 до 9, в разряде десятков – цифры от 2 до 9, в разряде сотен – цифры от 3 до 9 и так далее.

2. Ответ: 30. Цифры 2 и 3 уже участвуют в номере года, поэтому из всех месяцев нужно рассмотреть только 01 и 04 – 10. В каждом из этих номеров есть 0, поэтому в красивой дате не будет дня с номером, начинающимся с 0, 2 и 3, а также не будет дней 10 – 13 – остаются только 6 дней, 14 – 19.

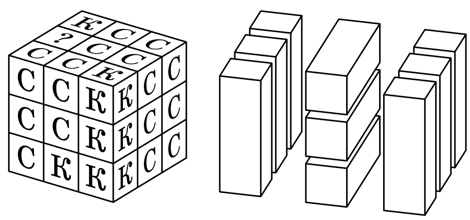
Значит, красивые даты есть в 6 месяцах, 04 – 09. И в каждом из этих 6 месяцев будет по 5 красивых дат: подходят все дни 14 – 19, кроме одного (с той же цифрой на конце, что у месяца).

3. Ответ: самую правую.

Раз за полминуты кот съел полрыбки, то за минуту он съест эту рыбку целиком. То есть за минуту кот съедает 3 клетки, а за целое число минут – кратное 3 число клеток.

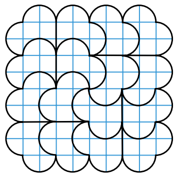
Суммарно во всех рыбках 68 клеток. Это число при делении на 3 даёт остаток 2. Значит, и в оставшейся рыбке количество клеток при делении на 3 даёт остаток 2. Такая рыбка всего одна – самая правая (с туловищем 4×5 клеток).

4. Ответ: см. левый рисунок.



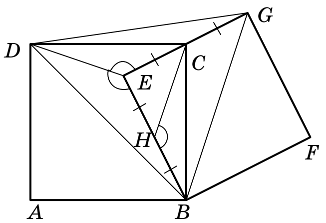
Сперва определим, как расположены бруски в кубе. Брусок, который проходит через синюю клетку на передней грани, снизу и справа ограничен красными кубиками $1 \times 1 \times 1$, поэтому проходит через центр куба $3 \times 3 \times 3$. Назовём этот брусок центральным. Красная и синяя клетки на правой грани принадлежат двум разным брускам, и оба эти бруска вертикальны (идти слева направо они не могут из-за центрального бруска). Значит, оставшиеся клетки на правой грани входят в ещё один вертикальный брусок. Теперь понятно, что куб состоит из трёх слоёв, как показано на правом рисунке. В каждом бруске, кроме среднего в левом слое, есть клетка известного цвета. Остаётся неизвестным цвет одного бруска, а значит, и его верхней клетки.

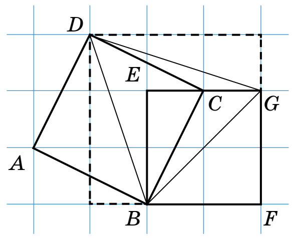
5. Ответ: см. рисунок.



6. Решение 1. Рассмотрим треугольники DEG и DEB. У них общая сторона DE, равные стороны EG и EB (как две стороны квадрата). Осталось доказать, что углы DEG и DEB равны, – тогда указанные треугольники будут равны (по двум сторонам и углу между ними), а значит, будут равны и соответственные стороны DG и DB.

Равенство этих углов можно доказать так. Отметим H – середину отрезка EB. Заметим, что $HB=EC$ как половины стороны правого квадрата, а также $BC=DC$, $\angle HBC=90^\circ-\angle ECB=$ $=\angle ECD$. Значит, треугольники HBC и ECD равны по двум сторонам и углу между ними. Так как треугольник EHC равнобедренный прямоугольный, $\angle EHC=45^\circ$, а $\angle DEG=\angle CHB=$ $=180^\circ-\angle EHC=135^\circ$. Но тогда и $\angle DEB=360^\circ-$ $-\angle DEG-\angle GEB=360^\circ-135^\circ-90^\circ=135^\circ$.





Решение 2. Перенесём чертёж на клетчатую бумагу. Начнём с квадрата $BEGF$: пусть это клетчатый квадрат 2×2. По отрезку BC построим квадрат $ABCD$. Теперь видно, что отрезки DG и DB равны как гипотенузы прямоугольных треугольников с катетами длиной 1 клетка и 3 клетки.

7. Ответ: да, может.

Заметим, что если взять из каждого мешка по монете, то их суммарный вес будет равен $7+8+\ldots+13=70$ грамм. Назовём такой набор монет *комплектом*.

Пусть в указанном царём мешке монеты весят x грамм каждая. Если взять 70 таких монет, то их вес равен $70x$ – такой же, как у x комплектов. То есть если мудрец узнает, сколько комплектов нужно, чтобы уравновесить эти 70 монет, он ответит на вопрос царя.

Пускай первым взвешиванием мудрец сравнит вес этих 70 монет и 10 комплектов. Если весы в равновесии, то $x=10$ и задача решена, если монеты перевесили, то $x>10$, если перевесили комплекты, то $x<10$.

Если мудрец знает, что $x>10$, то за одно взвешивание он легко выяснит, весят монеты 11, 12 или 13 г каждая. Действительно, теперь можно сравнить вес 70 монет и 12 комплектов. Если монеты перевесили, то $x=13$, если весы в равновесии, то $x=12$, если комплекты перевесили, то $x=11$.

Аналогичным образом мудрец может поступить в случае $x<10$: монеты тогда могут весить по 7, 8 или 9 г, так что осталось сравнить вес 70 монет и 8 комплектов.

Отметим, что при каждом взвешивании мудрец использует не более чем $70+12$ монет из мешка, на который указал царь, и не более чем по 12 монет из остальных мешков. Так что монет в мешках ему хватит.

8. Поскольку разных фигурок разное количество, какая-то фигурка использована больше остальных. Назовём её *главной*. Пусть каждый пленник рисует ту фигурку, каких он видит больше всего. Если все это смогут сделать, то все с главными фигурками на лбу дадут правильный ответ.

Остаётся решить, что делать пленнику, который не может определить, какая фигурка главная. Такая ситуация возникает, если главных фигурок (например, квадратов) ровно на 1 больше, чем следующих по количеству (например, кругов). Тогда пленники с квадратами на лбу будут видеть одинаковое количество кругов и квадратов.

Договоримся из двух кандидатов в главные фигурки называть ближайшую по часовой стрелке. Может ли так случиться, что каждый из квадратов назовёт при этом круг? Нет, так как квадратов больше! Значит, хотя бы один из квадратов угадает и всех спасёт.