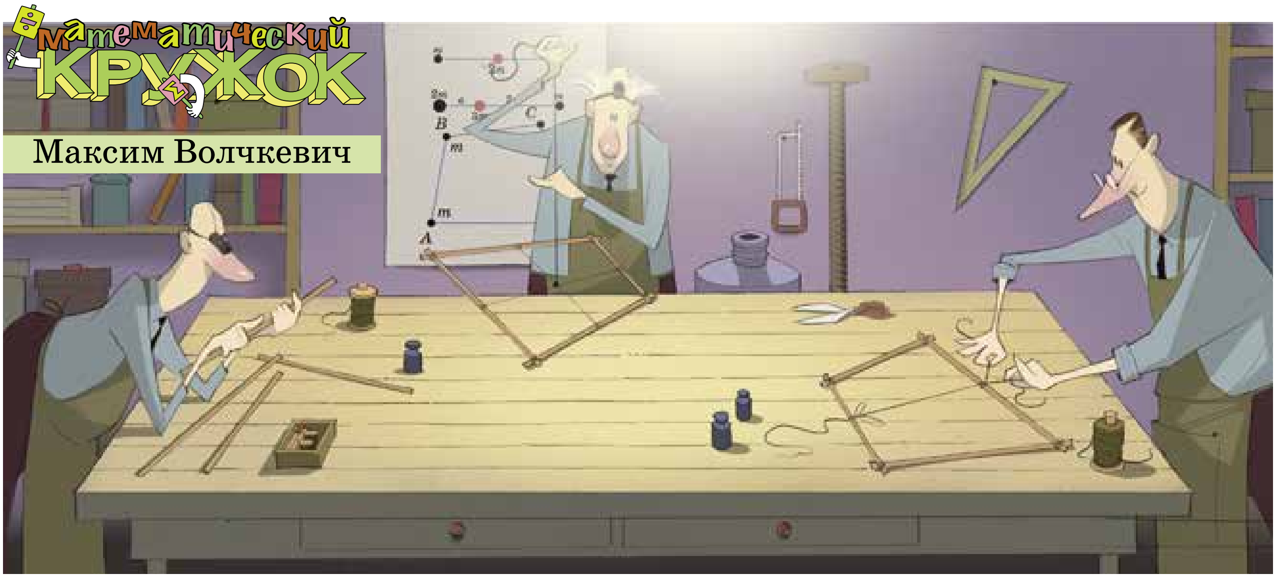


Максим Волчкевич

ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ И ГЕОМЕТРИЯ

Каждый из вас может проверить: чтобы уравновесить карандаш или линейку на ребре ладони, нужно поместить руку точно под серединой линейки и карандаша. Правда, такое равновесие не всегда будет устойчивым. Ещё со времён Архимеда людям было известно правило рычага. Если два одинаковых груза закрепить на концах прямой палки, а потом середину этой палки поставить на камень, то палка останется в равновесии. А если грузы неодинаковы, то для равновесия палку нужно поставить на камень в такой точке, которая разделит палку в отношении, обратно пропорциональном массам данных грузов (рис. 1). Более строго можно сказать так: произведение массы каждого груза на длину его плеча до опоры на рычаге должно быть одинаковым.

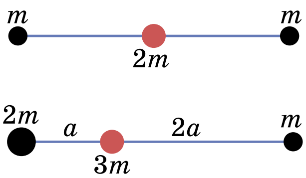


Рис. 1

Если палка с грузами на концах, поставленная на данную точку, останется в равновесии, мы говорим, что в этой точке находится центр её тяжести.

Давайте применим идею центра тяжести в геометрии. При этом мы будем исходить из двух вещей: будем считать, что *любая система грузов имеет один центр тяжести* и что *искать его можно разными способами, группируя данные массы в любом порядке*.

Центр тяжести четырёхугольника

Давайте найдём центр тяжести системы четырёх одинаковых грузов, которые находятся в вершинах данного четырёхугольника (рис. 2). Поместим в каждую вершину четырёхугольника $ABCD$ одинаковую массу m и будем считать, что его стороны – тонкие невесомые стержни.

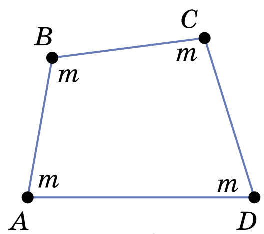


Рис. 2

Давайте разобьём четыре равные массы в вершинах четырёхугольника $ABCD$ на две пары: две массы на

Исходный текст опубликован в учебнике М.А. Волчкевича «Геометрия. 8 класс» (М.: Просвещение, 2021).

концах его стороны AB и две такие же массы на концах стороны CD. Центр тяжести отрезка AB находится в его середине – можно мысленно заменить две массы на его концах их суммой $2m$, находящейся в середине отрезка. Так же сумму масс на концах отрезка CD мы заменим на их сумму $2m$ и поместим её в его середину (рис. 3).

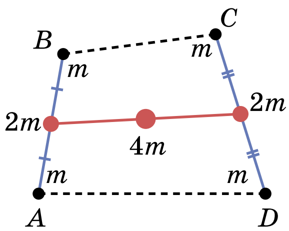


Рис. 3

Где же тогда находится центр тяжести всего четырёхугольника? Если рассуждать по аналогии, то он должен быть в середине отрезка, соединяющего центры масс сторон AB и CD четырёхугольника, то есть в середине его средней линии. Именно туда можно поместить сумму $4m$ всех масс его вершин.

А теперь самое интересное. Давайте разобьём четыре массы в вершинах четырёхугольника на пары другим способом: сгруппируем массы на концах его стороны BC в середине этого отрезка, а массы на концах стороны AD – в её середине. Тогда центр тяжести всего четырёхугольника должен будет находиться в середине отрезка, соединяющего середины этих сторон. Значит, он лежит на второй средней линии нашего четырёхугольника (рис. 4).

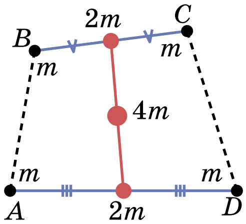


Рис. 4

Что из этого следует? Только то, что средние линии четырёхугольника должны иметь общую середину – делиться точкой пересечения пополам. Этот факт можно доказать и чисто геометрически, он равносилен *теореме Вариньона*: середины сторон четырёхугольника являются вершинами параллелограмма, а две его средние линии – диагонали этого параллелограмма. Значит, здесь механика отлично согласуется с геометрией.

Интересно посмотреть, что получится, если начать группировать массы в вершинах четырёхугольника ещё

одним способом. Давайте заменим массы на концах каждой его диагонали их суммой $2m$, находящейся в середине этой диагонали (рис. 5). Тогда центр тяжести всей системы должен находиться в середине отрезка, соединяющего середины диагоналей четырёхугольника. Конечно, из этого следует, что средние линии четырёхугольника и отрезок, соединяющий середины его диагоналей, имеют общую середину.

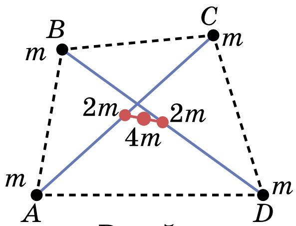


Рис. 5

Итак, центр тяжести четырёх точек с равными массами лежит на пересечении средних линий четырёхугольника, вершинами которого являются эти точки. Значит, центр параллелограмма Вариньона в четырёхугольнике совпадает с центром тяжести этой системы. Если изготовить четырёхугольник с двумя средними линиями из тонкой проволоки, а во все его вершины поместить одинаковые грузы, то можно будет поставить точку пересечения этих средних линий на остриё иглы, и такая конструкция окажется в равновесии (рис. 6).

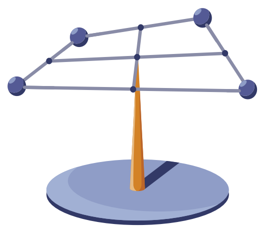


Рис. 6

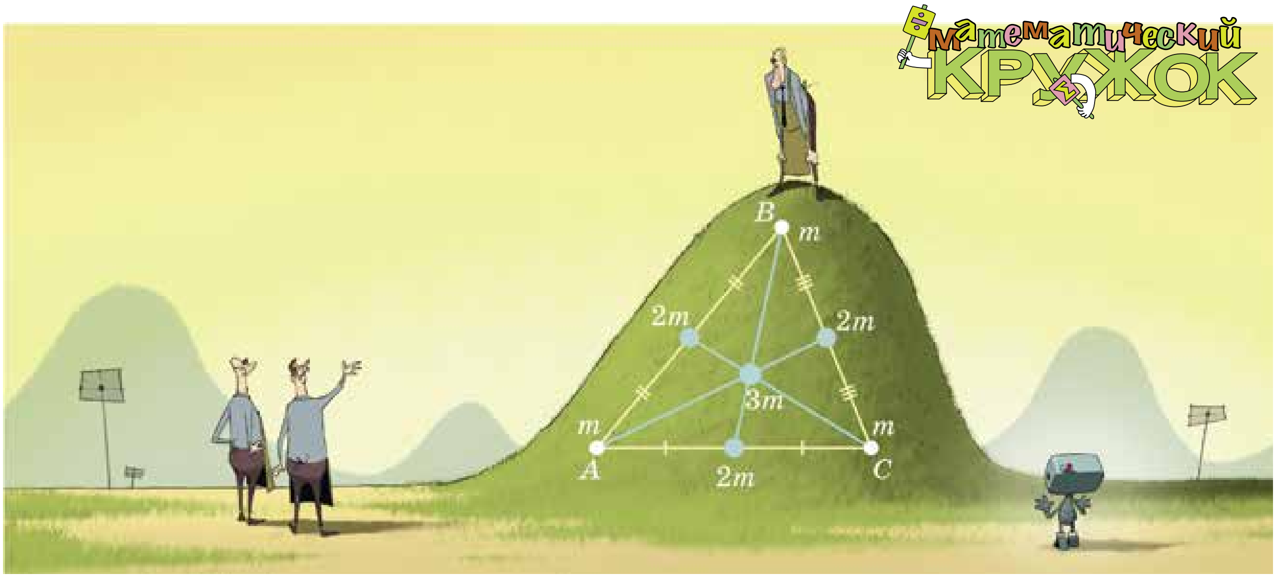
Тем же способом можно найти центр тяжести для четырёх неравных грузов, расположенных в вершинах произвольного четырёхугольника.

Центр тяжести треугольника

Теперь тем же механическим методом давайте найдём центр тяжести системы трёх одинаковых грузов.

Мысленно поместим во все вершины произвольного треугольника ABC одинаковые массы m и найдём центр тяжести этой системы. Центр тяжести двух грузов, помещённых в вершины A и C, лежит в середине отрезка между ними. Поэтому данные две массы мысленно можно заменить их суммой $2m$, расположенной в середине отрезка AC.

Как же теперь найти центр тяжести всех трёх масс в вершинах треуголь-



ника? Поскольку две из них мы заменили на одну суммарную массу в середине его стороны AC, то нам осталось найти центр тяжести только двух грузов, расположенных на концах данной медианы, проведённой из вершины B треугольника. По правилу рычага этот центр должен лежать на этой медиане и делить её в отношении $2:1$, то есть обратно пропорционально массам на концах медианы. Именно в этом месте будет сосредоточена суммарная масса $3m$ всей системы (рис. 7).

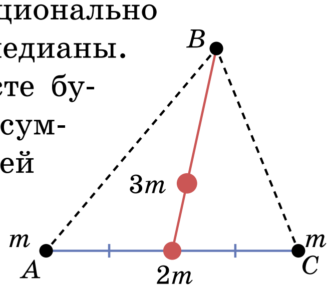


Рис. 7

А теперь точно таким же методом давайте заменим массы m в вершинах A и B треугольника на их сумму $2m$ и поместим её в середину отрезка AB. Тогда центр тяжести всего треугольника будет лежать на медиане, проведённой из его вершины C, и тоже разделит её в отношении $2:1$ (рис. 8).

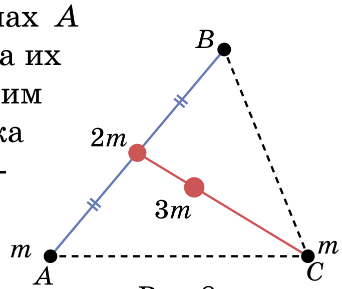


Рис. 8

Такое же рассуждение можно провести и для третьей медианы треугольника. Значит, центр тяжести всей системы обязан находиться одновременно на всех медианах данного треугольника и делить каждую из них в отношении $2:1$. Вот почему медианы треугольника должны пересекаться в одной точке (рис. 9).

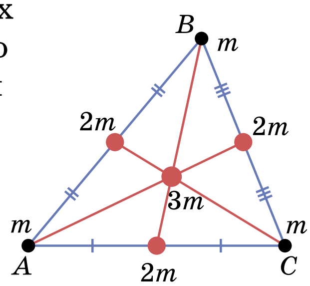
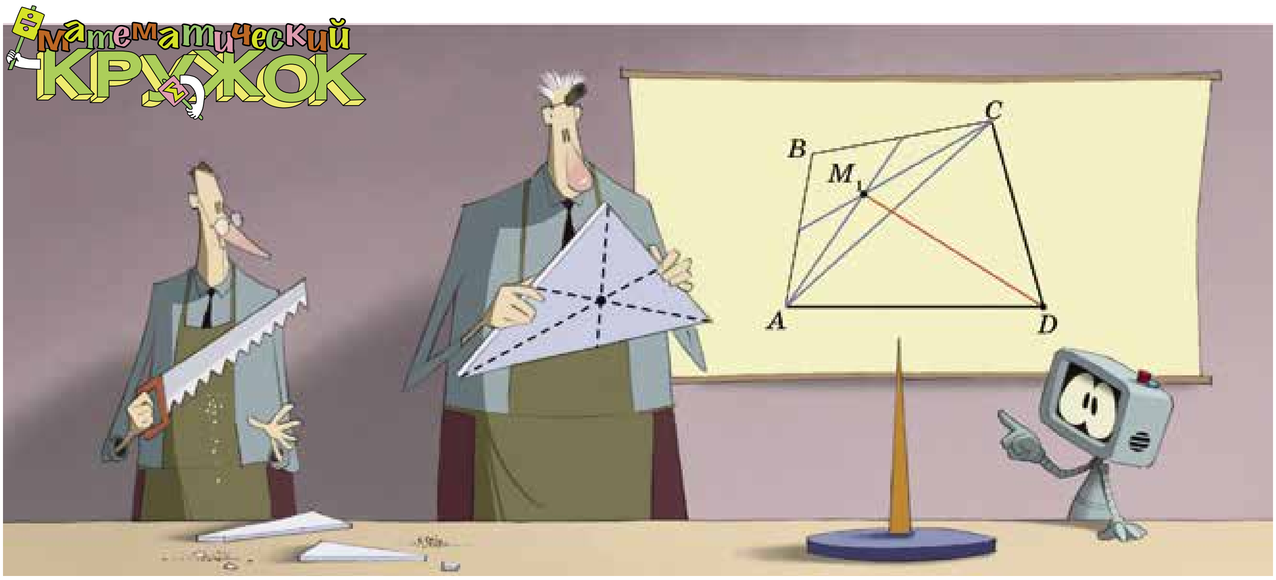


Рис. 9

Мы убедились, что к теореме о средних линиях четырёхугольника и теореме о медианах треугольника легко можно прийти с помощью соображений классической механики. Многие свои математические открытия великий Архимед делал тоже с помощью правила рычага. Об этом он даже написал целую книгу «Метод механических теорем». Она долгие века считалась навсегда по-



терянной и была случайно обнаружена на стёртом пергаменте в подвале библиотеки Константинополя только в начале XX века.

Конечно, мы пользовались тем, что центр тяжести системы не зависит от того, в каком порядке группировать массы её частей. И чтобы рассуждать более строго, нужно это доказать. Но сделать это будет гораздо удобнее, если пользоваться уже не правилом рычага, а складывать векторы.

Если вы вырежете из картона треугольник любой формы, найдёте точку пересечения его медиан и поставите эту точку на остриё вертикальной иглы, то треугольник на ней будет оставаться в равновесии (рис. 10). Это следует из того, что центр тяжести треугольной пластины всегда совпадает с центром тяжести равных масс, расположенных в её вершинах. Но такой же эксперимент с четырёхугольной пластиной произвольной формы у вас уже не получится. И дело здесь в том, что центр тяжести четырёхугольной пластины находится уже не на пересечении её средних линий.

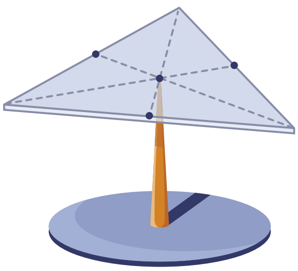


Рис. 10

Задачи

1. В вершинах треугольника поместили массы m, $2m$, $3m$. Постройте центр масс этого треугольника.

2. Во все вершины пятиугольника поместили равные массы. Как построить центр масс этого пятиугольника?

3. Начертите произвольный четырёхугольник $ABCD$. Отметьте точку M_1 пересечения медиан треугольника ABC. Проведите отрезок M_1D, как показано на рисунке 11. Теперь отметьте точку M_2 пересечения медиан треугольника BCD и соедините её отрезком с вершиной A. По аналогии проведите отрезки M_3B и M_4C. Какой факт вы заметили? Как бы вы его доказали?

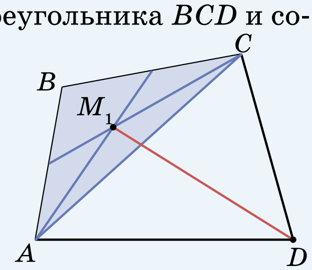


Рис. 11

Художник Алексей Вайнер