Константин Кохась

Как коллега Спрудль дорожил памятью

Горгулий сидел в своём кабинете директора фирмы «Математические услуги» и со скукой смотрел на кактусы, которые принёс в кабинет посетитель – коллега Спрудль.

– Вот ка-а-акой кактусёнок! – довольно промурлыкал коллега Спрудль, предъявляя ощетинившийся иголками маленький побег кактуса. – Сейчас мы его посадим. Ой! Колючий, зараза.

– Такого добра на ваших кактусах навалом, – без интереса произнёс Горгулий. – Можно за один сезон целое поле засеять.

– Не-е-ет, я всё делаю по науке. В начале каждого года я отрываю от каждого кактуса ровно одного кактусёнка. Кактусёнок целый год растёт, на сле-е-едующий год становится взрослым, но только к концу следующего года начинает ветвиться, бульк! После этого и от него можно тоже отрывать каждый год по одному кактусёнку. Я сам изобрёл это правило! За 10 лет удалось засе-е-ять кактусами целый подоконник.

– Позвольте я угадаю, – Горгулий жизнерадостно улыбнулся. – Ваши друзья ненавидят кактусы?

– Не то что бы не-е-енавидят. Просто сторонятся. Кактусы их не интересуют. Их интересуют не кактусы. А мне спокойнее. Однако моя пла-а-антация растёт, бульк. Я уже сбиваюсь со счёта. Хочу заказать у вас приложение на смартфон, которое будет пока-а-азывать, сколько у меня кактусов.

* * *

– Смотрите, какая у нашего приложения замечательная кнопка! – Горгулий чуть ли не светился. – Она словно утыкана колючками. Наш эксперт по сельскому хозяйству мышь Огрыза превзошла саму себя.

– В приложении мы для каждого кактуса завели отдельную запись, – объясняла Огрыза. – Помещайте туда всю информацию: фото, когда высажен, чем удобрялся, сколько кактусят... Куча фильтров, ссылок, кулинарных рецептов, агрономических лайфхаков, поиск единомышленников... Короче, всё, что нужно солидному кактусоводу-кактусоведу.

– А вы учли моё правило разведения кактусов?

– Разумеется! Каждая запись снабжена тегом «молодой» или «взрослый». В начале вегетативного сезона у каждой записи прошлогодний тег «молодой» или «взрослый» заменяется на «взрослый» – сюда мы будем добавлять данные за очередной год, кроме того, для каждой записи «взрослый» создаётся новая запись с тегом «молодой» для кактусёнка.

– Звучит солидно. А что с подсчётом размера всей коллекции?

– Проще простого! Сколько записей имеется – таков и размер.

* * *

– Как успехи на ниве кактусозаготовительных работ? – поинтересовался Горгулий.

– Пробле-е-емка обнаружилась с вашим приложением, бульк! – пожаловался коллега Спрудль. – Моя плантация сильно выросла, пришлось даже нанять садовника. И ваше приложе-е-ение теперь занимает столько места! При этом я совершенно не успеваю лично следить за каждым кактусом в отдельности. Их так много, что даже не удаётся поддерживать за-а-аписи про подкормку, поливку, стрижку…

– Мы предвидели ваши трудности, – уверенно сказал Горгулий. – За небольшую плату вы можете установить обновление, где радикально сокращён объём используемой памяти. Представляю вам эксперта по оптимальным процессам: таракан Кузька! Он разработал чрезвычайно эффективный подход!

Кузька скромно пошевелил усами.

– Идея лежит на поверхности, – стал объяснять он. – Не будем хранить информацию об индивидуальных кактусах! Запишем лишь, сколько кактусят появляется каждый год. Все кактусы на вашей плантации когда-то были кактусятами, правильно?

– Не совсем, всё-таки самый пе-е-ервый кактус достался мне уже взрослым.

– Хорошо, – согласился Кузька. – Давайте посчитаем. В первый год у вас от этого взрослого кактуса появился первый кактусёнок, значит, $f_1 = 1$. На следующий год завелся ещё один кактусёнок, значит, $f_2 = 1$. Предыдущий кактусёнок к этому времени дорос до состояния «взрослый», и годом позже появилось два

кактусёнка, $f_3 = 2$, а подросший стал третьим взрослым. И так далее. Сейчас у вас идёт который год?

– n-й, – не моргнув глазом сказал коллега Спрудль.

– Значит, в прошлом году у вас появилось f_{n-1} кактусят, и общее число кактусов к началу n-го года равно $1+f_1+f_2+\ldots+f_{n-1}$.

– Пе-е-ервое слагаемое единица – это мой самый пе-е-рвый кактус? – уточнил коллега Спрудль.

– Да. А последнее слагаемое – это подросшие кактусята, которые в n-м году ещё только начнут ветвиться и своих кактусят пока не имеют. Но вот в следующем году каждый кактус, учтённый в этой сумме, даст вам кактусёнка, понимаете, к чему я клоню?

– Вы хотите сказать, что эта сумма равна f_{n+1}?

– Именно так! Мы вывели потрясающую формулу

$$f_{n+1}=1+f_1+f_2+\ldots+f_{n-1}.$$

Столь длинная и сложная речь явно переутомила Кузьку. Он еле держался на ногах.

– Таким образом, – пришёл ему на помощь Горгулий, – число f_{n+1} – это не только количество кактусят, которые появятся в $(n+1)$-м году, но и по совместительству количество всех кактусов, имевшихся в самом начале n-го года. Это именно то число, которое вас интересует! Для его подсчёта требуется лишь хранить предыдущие числа – это всего-то $n-1$ ячейка памяти. Потрясающая экономия! И заметьте: кнопочку запуска приложения мы тоже поменяли. Видите – колючки топорщатся, но уже не так густо.

* * *

– На-а-аш век – это век рациональности, разумности и эффективности! Всюду оптимизация, системность и безотходность, бульк! А ваше приложение с ка-а-актусами – это монстр! – возмущался коллега Спрудль. – Каждый год оно отъедает у моего смартфона ещё одну ячейку памяти! Конечно, это совершенно не крити-и-чно, на ближайший миллион лет памяти точно хватит, но меня угнетает такая примитивность! Чтобы найти число кактусов, мы складываем всё, что хранится в памяти, бульк! Так могли рассуждать неандертальцы! Это расточительно! Мне-е-е и так уже пришлось расширить штат садовников. Где новейшие технологии и современные алгоритмы?

– Будут вам технологии. Возьмите бланк заказа. Давайте зафиксируем требуемый объём памяти. У меня для вас шикарное предложение. Предлагаю использовать всего две ячейки! Годится?

– Всего две? Как же вам это удастся?

– Вы имеете дело с профессионалами экстра-класса. Вот здесь напишите прописью «д-в-е». Хорошо. А как удастся… да проще простого! Сами посмотрите:

$$f_{n+1} = (1 + f_1 + f_2 + \ldots + f_{n-2}) + f_{n-1},$$
$$f_n = 1 + f_1 + f_2 + \ldots + f_{n-2}.$$

Чем, по-вашему, отличаются правые части строчек?

– В первой строке на одно слагаемое больше. Постойте… Вы хотите сказать, что выполняется правило

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}?$$

И эти ваши две ячейки соответствуют двум слагаемым в правой части формулы? Нет уж! Бульк! Не на того напали! Подайте мне способ вычислить f_n с одной ячейкой памяти! – Коллега Спрудль выхватил лежавший перед Горгулием бланк заказа и, перечеркнув слово «две», написал «одну».

– Что это за манеры – раз в минуту менять своё мнение! Ну, если вы заказываете всего одну ячейку – сделаем и с одной, но тогда извольте внести полную предоплату! За результатом зайдёте завтра!

* * *

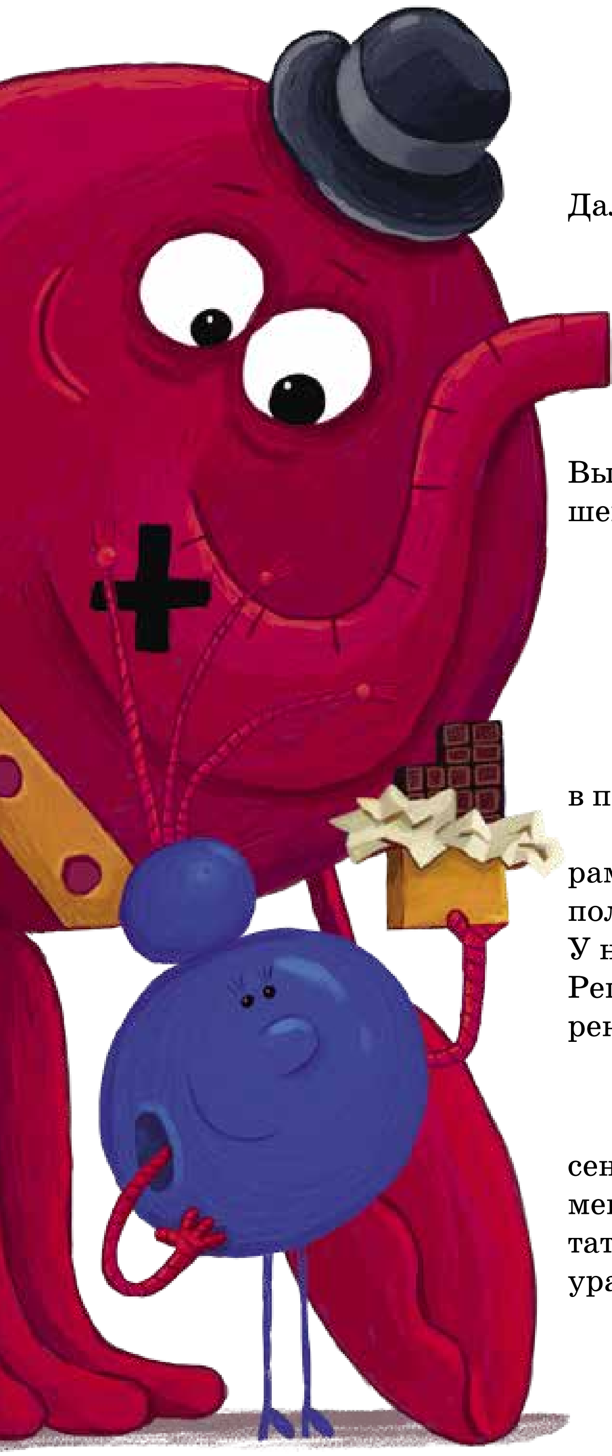
Горгулий отодвинул в сторону папки и ноутбук, и Бусенька выложила на стол несколько шоколадок. Коллега Спрудль удивлённо принюхался.

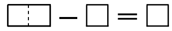
– Итак, вы подсчитываете кактусы, – начал Горгулий, в то время как Бусенька вынимала шоколадки из обёрток, – и вас интересует, какое число кактусов будет расти на вашей плантации в начале n-го года, – эксперт Кузька предложил обозначать его f_{n+1}. Началось всё с одного кактуса. Можно считать, что он относится в наших подсчётах к «нулевому» году, то есть $f_1 = 1$, а дальше события развивались так:

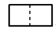
$$f_2 = 1, \quad f_3 = 2, \quad f_4 = 3, \quad f_5 = 5, \quad f_6 = 8, \quad \ldots$$

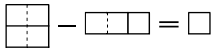
Коллега Спрудль проверил историю вопроса и кивнул. Бусенька аккуратно стала ломать шоколадки.

– Будем считать клеточки в фигурах, – объявила она и, выложив три кусочка на стол, соорудила из них равенство

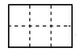


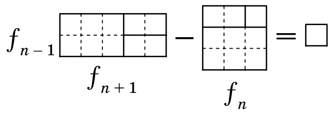


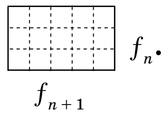
– Добавим к обеим частям по кусочку 1×2: .

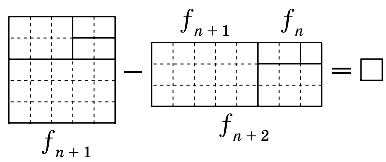


Коллега Спрудль тоже взял себе какой-то кусочек.

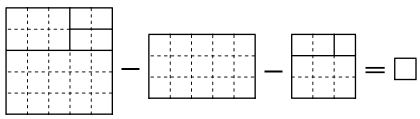
– Теперь добавим кусочки 2×3: .



Дальше добавляем кусочки $f_n \times f_{n+1}$: .



Вычитаемое разобьём на две исходные части и запишем получившееся равенство:



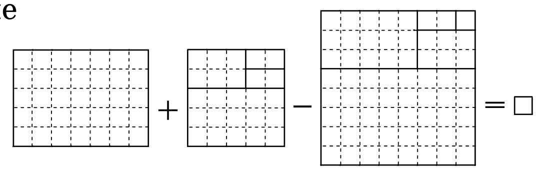
$$f_{n+1}^2 - f_{n+1} f_n - f_n^2 = 1.$$

Коллега Спрудль отправил кусок шоколадки себе в пасть и стал с подозрением рассматривать формулу.

– Неандертальцы с ужасом разбегаются по пещерам, – ехидно прокомментировал Горгулий. – Мы получили квадратное уравнение относительно f_{n+1}! У него два корня – положительный и отрицательный. Решая уравнение, находим, что положительный корень равен

$$f_{n+1} = \frac{f_n + \sqrt{5f_n^2 + 4}}{2}.$$

– Так происходит при чётном n, – уточнила Бусенька, – а при нечётном слагаемые в уравнении поменяются местами: большой квадратик будет вычитаться, а две другие части – прибавляться. Получится уравнение



$$f_{n+1}f_n+f_n^2-f_{n+1}^2=1.$$

И при нечётных n формула для корня уравнения будет выглядеть немного по-другому:

$$f_{n+1}=\frac{f_n+\sqrt{5f_n^2-4}}{2}.$$

Комбинируя эти два случая вместе, получаем итоговую формулу:

$$f_{n+1}=\frac{f_n+\sqrt{5f_n^2+4\cdot(-1)^n}}{2}.$$

– Неужели этот квадра-а-атный корень всегда целое число? – недоверчиво спросил коллега Спрудль.

– У него нет другого выбора, – уверенно ответил Горгулий.

– Если хотите,– сказала Бусенька, – корень можно убрать. Как я понимаю, при больших n числа f_n не просто большие – они огромные.

– В этом году – особенно! – грустно подтвердил коллега Спрудль.

– Поэтому $\sqrt{5f_n^2+4\cdot(-1)^n}$ с хорошей точностью равно $\sqrt{5}\,f_n$. Точнее говоря, при $n>2$ их разность по модулю всегда меньше 1. А значит, заменив этот сложный корень на $\sqrt{5}\,f_n$, мы изменим правую часть меньше чем на $\frac{1}{2}$ и, следовательно, сможем вычислять f_{n+1} по совсем простой формуле:

$$f_{n+1}=\left[\!\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot f_n\right]\!\right].$$

Здесь квадратные скобки – обычное округление.

– А мне формула с корнем больше нравится, – сказал Горгулий, – с корнем как-то загадочнее!

Когда коллега Спрудль ушёл, Горгулий спросил:

– Как ты думаешь, он ещё вернётся?

– Конечно, – ответила Бусенька. – Ему надоели кактусы. Он злится и ищет, на ком бы выместить злость. Завтра же явится со словами «подайте мне способ считать кактусы, не храня в памяти никаких данных».

– И что мы будем делать?

– Мы продадим ему явную формулу!

$$f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Художник Инга Коржнева