



XLIV ТУРНИР ГОРОДОВ

ВЕСЕННИЙ ТУР, 8-9 КЛАССЫ ОЛИМПИАДЫ

26 февраля 2023 года прошёл базовый вариант, а 12 марта 2023 года – сложный вариант весеннего тура XLIV Турнира городов. В скобках указано число баллов за полное решение задачи. При подведении итогов учитываются три задачи, по которым участник набрал больше всего баллов (баллы за пункты одной задачи суммируются).

Базовый вариант

1. В кабинете сидят N нерях, у каждого на его столе скопилось ненулевое количество мусора. Неряхи выходят обедать по одному (после возвращения предыдущего), а в это время каждый из остальных перекладывает половину мусора со своего стола на стол вышедшего. Может ли случиться, что после того, как все пообедали, количество мусора на столе у каждого будет таким же, как и до обеда, если

- а) [1] $N=2$;
- б) [3] $N=10$?

Алексей Заславский

2 [4]. В треугольнике ABC провели медианы BK и CN , пересекающиеся в точке M . Какое наибольшее количество сторон четырёхугольника $ANMK$ может иметь длину 1?

Егор Бакаев

3 [5]. На столе лежат 2023 игральных кубика. За 1 рубль можно выбрать любой кубик и переставить его на любую из четырёх граней, которые сейчас для него боковые. За какое наименьшее количество рублей гарантированно удастся поставить все кубики так, чтобы на верхних гранях у них было поровну точек? (Количества точек на гранях каждого игрового кубика равны числам 1, 2, 3, 4, 5, 6, суммарное число точек на противоположных гранях всегда равно 7.)

Егор Бакаев

4 [5]. Для произвольного числа x рассмотрим сумму

$$Q(x) = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{x}{10000} \right\rfloor.$$

Найдите разность $Q(2023) - Q(2022)$.





(Здесь $[x]$ обозначает целую часть числа x , то есть наибольшее целое число, не превосходящее x .)

Алексей Толпыго

5. На каждой клетке доски 5×5 лежит по одной монете, все монеты внешне одинаковы. Среди них ровно 2 монеты фальшивые, они одинакового веса и легче настоящих, которые тоже весят одинаково. Фальшивые монеты лежат в клетках, имеющих ровно одну общую вершину. Можно ли за одно взвешивание на чашечных весах без гирь гарантированно найти

- а) (2) 13 настоящих монет;
- б) (3) 15 настоящих монет;
- в) (2) 17 настоящих монет?

*Рустэм Женодаров,
Александр Грибалко,
Сергей Токарев*

Сложный вариант

1 [4]. Докажите, что в прямоугольном треугольнике с углом 30° одна из биссектрис в два раза короче какой-то другой биссектрисы.

Егор Бакаев

2 [5]. На клетчатой доске 10×10 в одной из клеток сидит бактерия. За один ход бактерия сдвигается в соседнюю по стороне клетку и делится на две бактерии (обе остаются в той же клетке). Затем снова одна из сидящих на доске бактерий сдвигается в соседнюю по стороне клетку и делится на две и так далее. Может ли после нескольких таких ходов во всех клетках оказаться поровну бактерий?

Александр Грибалко

3 [7]. Назовём натуральное число *заурядным*, если в его десятичной записи встречаются только нули и единицы. Пусть произведение двух заурядных чисел оказалось заурядным числом. Обязательно ли тогда сумма цифр произведения равна произведению сумм цифр сомножителей?

*Виктор Клепцын,
Константин Кноп*





XLIV ТУРНИР ГОРОДОВ

ВЕСЕННИЙ ТУР, 8-9 КЛАССЫ

ОЛИМПИАДЫ

4 [8]. На сторонах равностороннего треугольника ABC построены во внешнюю сторону треугольники $AB'C$, $CA'B$, $BC'A$ так, что получился шестиугольник $AB'SA'BC'$, в котором каждый из углов $A'BC'$, SAB' , $B'SA'$ больше 120° , а для сторон выполнены равенства $AB' = AC'$, $BC' = BA'$, $CA' = CB'$. Докажите, что из отрезков AB' , BC' , CA' можно составить треугольник.

Давид Бродский

5 [8]. Натуральные числа от 1 до 100 раскрашены в три цвета: 50 чисел – в красный, 25 чисел – в жёлтый и 25 чисел – в зелёный. Известно, что все красные и жёлтые числа можно разбить на 25 троек так, чтобы в каждой тройке было два красных числа и одно жёлтое, которое больше одного красного и меньше другого. Аналогичное утверждение верно для красных и зелёных чисел. Обязательно ли все 100 чисел можно разбить на 25 четвёрок, в каждой из которых два красных числа, одно жёлтое и одно зелёное, при этом жёлтое и зелёное числа лежат между красными?

Александр Грибалко

6. Пусть X – некоторое множество целых чисел, которое можно разбить на N непересекающихся возрастающих арифметических прогрессий (бесконечных в обе стороны), а меньше чем на N – нельзя. Для любого ли такого X такое разбиение на N прогрессий единственно, если

а) [4] $N=2$;

б) [4] $N=3$?

(Возрастающая арифметическая прогрессия – это последовательность, в которой каждое число больше своего соседа слева на одну и ту же положительную величину.)

Виктор Клепцын

7 [10]. Правильный 100-угольник разрезали на несколько параллелограммов и два треугольника. Докажите, что эти треугольники равны.

Александр Юран



Художник Сергей Чуб

