НАШ КОНКУРС, VIII ТУР

(«Квантик» № 4, 2023)

36. *У профессора есть несколько будильников. Вечером он заводит все будильники с интервалами в* 5 *минут, на* 7:00, 7:05, 7:10, *и так далее. Когда будильник звонит, профессор мгновенно нажимает кнопку «отложить», а будильник переносит звонок на* 9 *минут вперёд. Профессор окончательно просыпается, когда одновременно звонят сразу* 4 *будильника. Успеет ли он проснуться ранее* 9:30 *утра, чтобы успеть на свою зум-лекцию?*

Ответ: да. Посмотрим на будильники, впервые сработавшие в 7:00, 7:45 и 8:30. К 9:15 от первого звонка этих трёх будильников пройдёт 135, 90 и 45 минут соответственно. Все эти числа кратны 9, поэтому в 9:15 прозвенят эти три будильника и четвёртый, заведённый на 9:15.

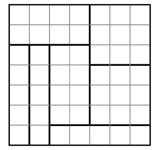
37. *Из деревянного бруса в форме параллелепипеда* $1\,дм \times 1\,дм \times 50\,дм$ *несколькими поперечными распилами получили бруски, из которых склеили каркас куба. Какова высота этого каркаса, если его рёбра в поперечном сечении имеют размер* $1\,дм \times 1\,дм$?

Ответ: 5,5 дм. Пусть высота каркаса h дм. Чтобы найти h, распилим каркас на части и сложим исходный брус. Выпилим 4 вертикальных бруска $1\times 1\times h$, останется 8 брусков $1\times 1\times (h-2)$. Сложив бруски в ряд вплотную друг к другу, получим параллелепипед шириной и высотой 1 дм и длиной $4h + 8(h-2) = 12h - 16$. По условию $12h - 16 = 50$, откуда $12h = 66$ и $h = 5{,}5$ дм.

38. *Фокусник хочет заготовить* 10 *карточек, написать на каждой натуральное число, не большее* 90, *чтобы все числа были различны, и показывать такой фокус: зритель наугад выбирает две карточки, называет фокуснику сумму чисел на них, а фокусник тут же отгадывает, какие две карточки у зрителя. Помогите фокуснику найти числа и объясните, почему фокус будет получаться.*

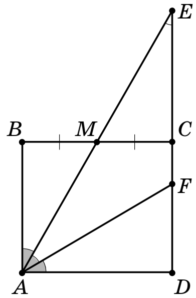
Ответ: можно взять числа 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 33, 54, 87. Это первые 10 чисел последовательности Фибоначчи: очередное число получается как сумма двух предыдущих. Фокусник сможет отгадать числа с карточек зрителя, если любые две разные пары чисел дают разные суммы. Но для чисел Фибоначчи это так: среди четырёх чисел двух пар есть наибольшее, оно уже не меньше суммы двух чисел другой пары, а вместе со вторым числом в своей паре – больше.

39. *Квадрат* 7×7 *разрезали по границам клеток на* 7 *прямоугольников одинакового периметра. Обязательно ли все эти прямоугольники одинаковые?*



Ответ: нет. См. рисунок: квадрат разрезан на прямоугольники 1×5, 2×4 и 3×3 периметра 12.

40. *Один из углов прямоугольника поделён двумя лучами на три равных угла. Один из этих лучей делит сторону прямоугольника пополам. Второй луч пересекает другую сторону. В каком отношении он её делит?*



Ответ: 1:2. Обозначим точки как на рисунке. Продлим луч AM и сторону DC до пересечения в точке E. Тогда треугольники ABM и ECM равны ($BM = MC$, $\angle BMA = \angle EMC$ и $\angle ABM = \angle ECM = 90°$), поэтому $EC = AB = CD$, а также $\angle CEM = \angle MAB = \angle MAF$. Значит, треугольник AEF – равнобедренный, $AF = EF$. С другой стороны, в прямоугольном треугольнике AFD катет FD лежит против угла в $90° : 3 = 30°$, значит, гипотенуза AF в два раза больше катета FD. Тогда $2\,FD = AF = EF = EC + CF = CD + CF = FD + 2\,CF$, откуда $FD = 2\,CF$.

ЗАЧЕМ САМОВАРУ ТРУБА?

(«Квантик» № 5, 2023)

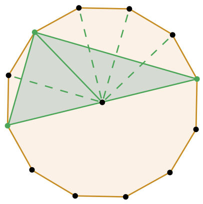
Краткий ответ: труба создаёт тягу, то есть увеличивает приток свежего воздуха, а от постоянного поступления кислорода усиливается горение (мы пользуемся этим, раздувая огонь). Разберёмся, почему же труба создаёт тягу.

Воздух поступает к дровам снизу, через решётку, проходит по внутренней трубе, где горят дрова, и выходит сверху – сразу наружу или сначала во внешнюю трубу. Ведь при нагревании воздух расширяется, становится легче холодного и поднимается вверх. Это происходит и без трубы: даже от обычного костра мы видим более или менее поднимающийся смешанный с горячим воздухом дым. Но без трубы горячий воздух сразу перемешивается с окружающим холодным воздухом. А если поставить трубу, в ней перемешивания не происходит и образуется столб горячего воздуха.

Присмотримся теперь к этому столбу воздуха. Пока огня нет, воздух внутри трубы имеет ровно такую массу, чтобы уравновесить разницу давлений внизу трубы и вверху трубы. Но если весь этот воздух нагреть, масса воздуха в трубе будет меньше – например, если нагреть до 300 градусов, то вдвое меньше! А вот давление снаружи самовара практически не изменится, так что разница давлений сверху и снизу трубы будет создавать тягу. Чем выше труба, тем больше разница давлений и тем сильнее тяга.

САМЫЙ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЙ ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

Соединив центр 12-угольника со всеми его вершинами, мы получим 12 углов по $360^\circ : 12 = 30^\circ$. Два таких соседних угла образуют угол 60°, а четыре – 120°. Соединив центр 12-угольника с вершинами, как на рисунке, мы получим два равнобедренных треугольника с общей боковой стороной и углами 60° и 120° при вершине. Но у таких треугольников углы при основании равны 60° и 30°, значит, три отмеченные вершины 12-угольника действительно образуют треугольник с углами 30°, 60° и 90°.



СУММА ЧЕРЕЗ ЧЁРТОЧКУ

Flügel по-немецки – крыло. И по-русски можно сказать: *крыло здания*. А флигель-адъютант должен передавать команды начальника на фланги – «крылья» армии. Перед нами снова разные значения одного слова, хотя и заимствованного.

АРАБСКИЕ ЦИФРЫ.

Ответ: 2022 – 1443, 2012 – 1433, 2014 – 1435.

Если предположить, что разница между двумя календарями постоянна, то из первых двух паро ٤ на 1 больше, чем ٣. А из второй и третьей ٥ − ٣ = ٤ − ٢, то есть ٣ + ٤ = 7. Поэтому ٤ = 4, ٣ = 3. Для справки приведём и остальные цифры:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩

На самом деле, соотношение между двумя календарями сложнее, см. следующий номер.

КАК КОЛЛЕГА СПРУДЛЬ ДОРОЖИЛ ПАМЯТЬЮ

Последовательность f_n, обнаруженная коллегой Спрудлем, – это знаменитые *числа Фибоначчи*, которые вместе с рекуррентной формулой

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$$

были известны ещё в древней Индии, а история о кроликах вошла в математический обиход в XIII веке. Формула, доказанная Кузькой, чуть менее известна. А формула, которую Бусенька вывела с помощью шоколадок,

$$f_{n+1}^2 - f_{n+2}f_n = (-1)^n,$$

называется *тождеством Кассини*. Бусенька преобразовала тождество Кассини к виду

$$f_{n+1}^2 - f_{n+1}f_n - f_n^2 = (-1)^n.$$

И если заменить здесь f_{n+1} на x, получится квадратное уравнение:

$$x^2 - f_n x - f_n^2 - (-1)^n = 0.$$

При $x = 0$ левая часть отрицательна – значит, уравнение имеет два корня разного знака. Факт, на который обратил внимание коллега Спрудль, – что выражение $5a^2 \pm 4$ под знаком квадратного корня будет квадратом целого числа, если взять в качестве a число Фибоначчи f_n (а на самом деле – только для чисел Фибоначчи оно и будет квадратом), – совершенно удивительный, доказать его непосредственно трудно.

Бусенька не стала объяснять коллеге Спрудлю, почему квадратный корень с хорошей точностью равен $\sqrt{5}f_n$. Для оценки можно было воспользоваться приёмом «домножим на сопряженное» или формулой $a - b = \dfrac{a^2 - b^2}{a+b}$:

$$\sqrt{5f_n^2 + 4\cdot(-1)^n} - \sqrt{5}f_n = \frac{\left(\sqrt{5f_n^2+4\cdot(-1)^n}\right)^2 - \left(\sqrt{5}f_n\right)^2}{\sqrt{5f_n^2+4\cdot(-1)^n} + \sqrt{5}f_n} =$$

$$= \frac{4\cdot(-1)^n}{\sqrt{5f_n^2+4\cdot(-1)^n} + \sqrt{5}f_n}.$$ Начиная с $n = 3$ число $f_n \geqslant 2$, и по модулю знаменатель больше числителя.

Сложная формула, которой заканчивается сказка, называется *формулой Бине́*. На первый взгляд кажется невероятным, что правая часть формулы – целое число. Бусенькина формула $f_{n+1} = \left[\!\left[\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot f_n\right]\!\right]$ означает, что f_{n+1} приблизительно в $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ раз больше, чем f_n, поэтому весьма правдоподобно, что f_n не сильно отличается от $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ – первого слагаемого формулы Бине. Но до формулы Бине отсюда ещё далеко.

XLIV ТУРНИР ГОРОДОВ, ВЕСЕННИЙ ТУР, 8 – 9 КЛАССЫ

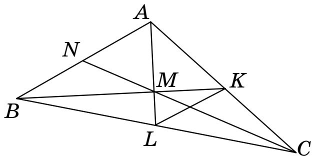
Базовый вариант

1. Ответ: может.

а) Подходит пример, когда у первого ушедшего на обед 2 г мусора, а у второго – 4 г.

б) Занумеруем нерях в порядке их ухода на обед. Пусть на столе i-го неряхи лежит 2^i г мусора. После ухода первого на его столе окажется $2 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^9 = 2^{10}$ г мусора, а на каждом из остальных столов вес мусора уменьшится вдвое, то есть произойдёт циклический сдвиг. После ухода второго произойдёт аналогичный сдвиг, а после 10 таких сдвигов на всех столах окажется исходное количество мусора.

2. Ответ: 2 стороны. Подходит, например, любой треугольник, где $AB = AC = 2$.



Напомним, что медианы треугольника делятся точкой их пересечения в отношении 2:1, считая от вершины. Пусть хотя бы три стороны четырёхугольника $ANMK$ равны 1. Возможны всего два принципиально различных случая.

1) $AN = NM = MK = 1$. Тогда $NB = 1$, $MB = 2$, значит, $MN + NB = MB$.

2) $KA = AN = NM = 1$. Тогда $AC = 2$, $NC = 3$, значит, $NA + AC = NC$.

В обоих случаях получаем противоречие с неравенством треугольника.

3. Ответ: за 2022 рубля. Пусть есть пара *противоположных* кубиков, то есть сумма точек на их верхних гранях равна 7. Заметим, что на эту пару потребуется суммарно 2 рубля, к какому бы значению ни захотелось их привести. Будем откладывать пары противоположных кубиков, пока они есть. Так как исходное количество кубиков нечётно, то в конце останется хотя бы один кубик, пусть на его верхней грани n точек. Тогда остальные непарные кубики, каждый не более чем за 1 рубль, можно привести в то же состояние. Значит, 2022 рублей хватит.

Однако мог остаться только один кубик без пары, поэтому 2022 рубля необходимо.

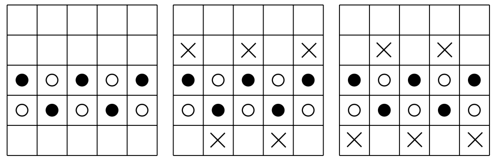
4. Ответ: 6. Очевидно, $\left\lfloor\frac{x-1}{k}\right\rfloor \leqslant \left\lfloor\frac{x}{k}\right\rfloor$. Неравенство $\left\lfloor\frac{x-1}{k}\right\rfloor < \left\lfloor\frac{x}{k}\right\rfloor = m$ означает, что $x - 1 < km \leqslant x$, откуда $x = km$, то есть x делится на k, и тогда $\left\lfloor\frac{x-1}{k}\right\rfloor = \left\lfloor\frac{x}{k}\right\rfloor - 1$. Верно и обратное: если x кратно k, то $\left\lfloor\frac{x-1}{k}\right\rfloor < \left\lfloor\frac{x}{k}\right\rfloor$. Значит, среди чисел $\lfloor 2023\rfloor - \lfloor 2022\rfloor$, $\left\lfloor\frac{2023}{2}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{2022}{2}\right\rfloor$, ... , $\left\lfloor\frac{2023}{10\,000}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{2022}{10\,000}\right\rfloor$ единиц ровно столько, сколько у числа 2023 натуральных делителей, а остальные числа равны нулю. *Разность* $Q(2023) - Q(2022)$ равна сумме вышеуказанных чисел, то есть количеству натуральных делителей числа $2023 = 7 \cdot 17^2$, их 6.

5. Ответ: а), б) можно; **в)** нельзя.

Раскрасим доску и монеты на ней в шахматном порядке (угловые клетки чёрные, монеты красим в цвет клетки). Тогда обе фальшивые монеты одного цвета.

а) Положим на чаши 4 чёрные монеты, соседние с центральной: две левые – на левую, две правые – на правую. При равновесии все чёрные монеты настоящие (две фальшивые чёрные не могут быть ни на разных чашах, ни обе вне чаш). Если какая-то чаша перевесит, то настоящие – две монеты на этой чаше и все белые.

б) Сравним 5 чёрных монет с 5 белыми на левом рисунке ниже. При равновесии 15 монет в нижних трёх строках настоящие. Если чёрные монеты тяжелее, не взвешиваемая фальшивая монета может находиться только в квадратах, отмеченных крестиками на рисунке в центре. Значит, мы нашли $25 - 5 - 5 = 15$ настоящих монет. Если белые монеты тяжелее, получаем рисунок справа, и снова у нас не более $5 + 5$ клеток, где могут лежать фальшивые монеты.



в) Априори любая из 25 монет *подозрительна* (может быть фальшивой). Взвешивание может иметь 3 исхода, поэтому по крайней мере при одном из них подозрительными останутся не меньше 9 монет, то есть будет найдено не более $25 - 9 = 16$ настоящих монет.

Замечание. Можно доказать, что даже 16 настоящих монет нельзя найти гарантированно.

Сложный вариант

1. См. решение на с. 8–9.

2. Ответ: не может. Раскрасим клетки доски в белый и чёрный цвета в шахматном порядке. Рассмотрим разность между количеством бактерий на белых клетках и количеством бактерий на чёрных клетках. При ходе с чёрной клетки на белую она увеличивается на 3, а при ходе с белой на чёрную уменьшается на 3. Поскольку вначале эта разность равнялась 1 или –1, она никогда не станет кратна 3, в частности не станет равна 0.

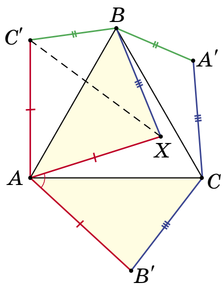
3. Ответ: не обязательно. Рассмотрим произведение двух заурядных чисел

$$(10^2 + 10^4 + 10^8 + \ldots + 10^{1024}) \times$$
$$\times (10^{N-2} + 10^{N-4} + 10^{N-8} + \ldots + 10^{N-1024}),$$

где N – большое чётное число (например, миллион). Раскрыв скобки, мы получим много слагаемых, каждое из которых – степень числа 10. Если бы все слагаемые были разными, мы получили бы заурядное число с суммой цифр, равной произведению сумм цифр исходных чисел. Посмотрим, получились ли какие-то слагаемые одинаковыми. Если $10^a \cdot 10^{N-b} = 10^x \cdot 10^{N-y}$, то $a+N-b=x+N-y$, откуда $a+y=b+x$. Так как a, b, x, y – степени двойки, равенство возможно лишь в случаях $a=x$, $b=y$ (но тогда это одно и то же слагаемое) и $a=b$, $x=y$. Поэтому у нас будет всего 10 одинаковых слагаемых, равных 10^N, в сумме они дадут 10^{N+1}.

Никакие другие слагаемые не равны 10^{N+1}, так как у всех слагаемых показатель степени чётный. Поэтому сумма слагаемых будет заурядным числом, но сумма его цифр будет на 9 меньше произведения сумм цифр исходных чисел.

4. Чтобы из этих отрезков можно было составить треугольник, достаточно доказать, что наибольший из них (пусть это AC') меньше суммы двух других. Повернём треугольник $AB'C$ вокруг точки A на $60°$ так, чтобы точка C перешла в точку B. Точка B' перейдёт при этом в новую точку X (см. рисунок). Заметим, что в треугольнике $C'AX$ боковые стороны AC' и AX равны, а угол между ними больше $60°$. Тогда сторона $C'X$ в нём наибольшая, но она не превосходит $C'B+BX$ по неравенству треугольника. Значит, $AC' < C'X \leqslant C'B+BX$.



5. Ответ: да. Упорядочим числа каждого цвета по возрастанию. Красные числа ещё и разобьём на две части: первые 25 назовём *малыми*, а следующие 25 – *большими*. Докажем, что можно взять в качестве k-й четвёрки k-е жёлтое и k-е зелёное числа и из красных k-е малое и k-е большое.

Действительно, k-е жёлтое число больше, чем хотя бы k из красных чисел (по одному из каждой тройки, в которую входят первые k жёлтых чисел). Значит, оно больше k-го малого красного числа. Аналогично, k-е жёлтое число меньше k-го большого красного числа (докажите!). Те же рассуждения справедливы для k-го зелёного числа.

6. а) Ответ: для любого. Предположим противное – есть четыре арифметические прогрессии A, B, C и D, причём A и B не пересекаются и дают в объединении X, и C и D – тоже. Можно считать, что у прогрессии A разность a не больше, чем у каждой из остальных.

Ясно, что A не совпадает ни с C, ни с D – иначе разбиения совпадают. Тогда A и не содержится целиком ни в C, ни в D (так как у A наименьшая разность). Значит, A пересекается и с C, и с D.

Пусть число x лежит в пересечении A и C, тогда ни одно из чисел $x-a$ и $x+a$ не лежит в C (иначе A совпадала бы с C). Значит, они оба лежат в D, а разность прогрессии D – делитель числа $2a=(x+a)-(x-a)$, причём не меньший a, то есть это $2a$ или a. Последнее невозможно, поскольку A не совпадает с D. Аналогично получаем, что разность прогрессии C равна $2a$. Тогда прогрессии C и D в объединении дают A, а прогрессия B отсутствует – противоречие.

б) Ответ: не для любого. Пусть X – все целые числа, дающие остатки 0, 3, 4, 6, 8 или 9 при делении на 12. Первое разбиение: все числа, кратные 3; все числа с остатком 4 от деления на 12; все числа с остатком 8 от деления на 12. Второе разбиение: все числа, кратные 4; все числа с остатком 3 от деления на 6; все числа с остатком 6 от деления на 12.

Докажем, что на две прогрессии разбить X нельзя. Предположим противное. Тогда минимум четыре числа из 0, 3, 4, 6, 8, 9, 12 принадлежат одной прогрессии. Значит, минимум два из них лежат «с одной стороны» от 6, и поэтому разность этой прогрессии – это 1, 2, 3 или 4. Первые два случая невозможны (возникнут лишние числа), а в остальных двух случаях оставшееся множество – не прогрессия.

7. У каждого параллелограмма с горизонтальными сторонами покрасим верхнюю сторону в синий цвет, а нижнюю – в красный. То же сделаем со всеми имеющимися горизонтальными сторонами треугольников (если треугольник снизу от стороны, красим её в синий, иначе – в красный). А если у 100-угольника есть горизонтальные стороны, то их покрасим наоборот: верхнюю в красный цвет, а нижнюю – в синий.

Теперь каждый горизонтальный отрезок покрашен один раз в синий цвет («снизу») и один раз в красный («сверху»), поэтому синего и красного цвета мы потратили поровну. Но ведь и в каждом параллелограмме, и в нашем 100-угольнике синего и красного цвета было использовано поровну. Поэтому если их стереть и оставить только два треугольника, то в них тоже синего и красного поровну. Другими словами, если у одного есть синяя горизонтальная сторона какой-то длины, то у другого есть красная горизонтальная сторона такой же длины!

Аналогично докажем, что остальные стороны треугольников попарно равны. Следовательно, они равны по трём сторонам.