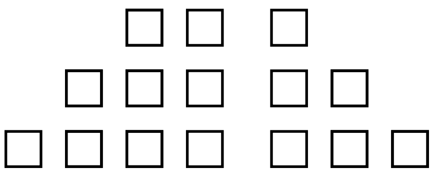
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СЮРПРИЗЫ

Григорий Мерзон

ПИРАМИДА ИЗ РАВНЫХ СУММ

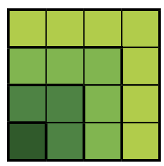
Перед вами – начало («вершина») бесконечной пирамиды. На первом её этаже слева два места для чисел, а справа одно. А на каждом следующем этаже мест становится больше: добавляется по одному месту слева и справа.



Оказывается, если заполнить её последовательными числами (1, 2, ...) по этажам, то на каждом этаже сумма чисел слева равна сумме чисел справа!

$$1+2=3$$
$$4+5+6=7+8$$
$$9+10+11+12=13+14+15$$
$$16+17+18+19+20=21+22+23+24$$
$$\ldots$$

Разберёмся, как она устроена. Какие числа стоят в начале строк? 1, 4, 9, 16... – похоже на последовательность квадратов. Почему так получается? В первой строке стоят 3 числа, в следующей 5 чисел и так далее. То есть, например, первое число четвёртой строки идёт после $3+5+7$ чисел, а значит, равно $1+3+5+7=4^2$. И вообще, первое число N-й строки равно сумме последовательных нечётных чисел $1+3+5+7+\ldots+(2N-1)$, то есть N^2, что видно из картинки.

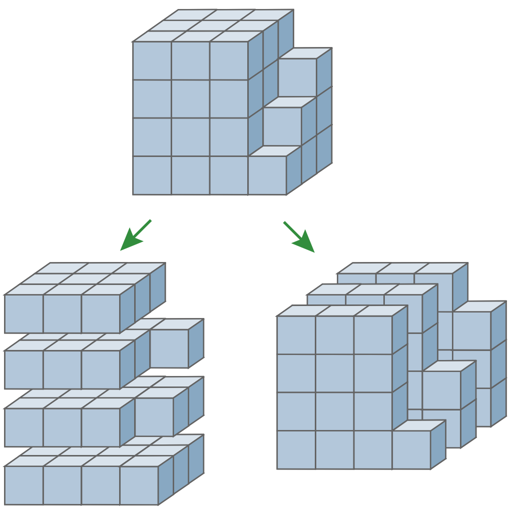


$$1+3+5+7=4^2$$

Вычеркнем в левой части N-й строки первое число, а остальные числа в этой части увеличим на N. Мы вычеркнули слагаемое N^2, зато каждое из остальных N слагаемых увеличили на N. Значит, сумма не изменилась. А получилась как раз правая часть N-й строки (подумайте, почему)! Например,

$$4\cdot 4+17+18+19+20=$$
$$=(17+4)+(18+4)+(19+4)+(20+4)=$$
$$=21+22+23+24.$$

А можно то же равенство сложить не из квадратиков, а из кубиков. У фигуры на рисунке самый верхний слой – квадрат $N \times N$, в следующем слое к квадрату добавлен один кубик, в третьем – уже два... И всего слоёв $N+1$. То есть общее количество кубиков в фигуре – это сумма в левой части равенства.



$N^2+(N^2+1)+\ldots$ $\qquad$ $N(N+1)+1+\ldots$

Посмотрим на ту же фигуру с другой стороны: в самом ближнем к нам слое прямоугольник $N \times (N+1)$ и ещё один кубик, в следующем на один больше (то есть $N(N+1)+2$ кубика)... И всего таких слоёв N. Значит, общее количество кубиков в фигуре равно и сумме в правой части равенства. Получается, что две суммы в строке нашей пирамиды просто подсчитывают объём одной и той же фигуры разными способами[1].

В заключение – несколько первых этажей ещё одной пирамиды. Разберётесь в том, как устроена она?

$$3^2+4^2=5^2$$
$$10^2+11^2+12^2=13^2+14^2$$
$$21^2+22^2+23^2+24^2=25^2+26^2+27^2$$
$$\ldots$$

[1] Такое доказательство предложил математик Owen Biesel.

Художник Алексей Вайнер