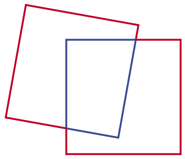
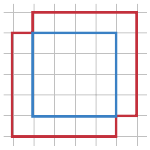
НАШ КОНКУРС, X ТУР
(«Квантик» № 6, 2023)

46. *Квантик положил два одинаковых квадрата на стол так, что они налегают друг на друга, но не совпадают. Затем он обвёл красным карандашом получившуюся фигуру, а оставшиеся части сторон квадратов обвёл синим карандашом. Оказалось, что периметр красной фигуры в полтора раза больше периметра синей. Во сколько раз периметр красной фигуры больше периметра одного квадрата?*



Ответ: в $6/5$ раз. Сумма периметров красной и синей фигур равна, с одной стороны, двум периметрам квадрата, а с другой стороны – это $1+2/3=5/3$ периметра красной фигуры. Значит, периметр красной фигуры больше периметра квадрата в $2\cdot 3/5=6/5$ раз.

Построить чертёж, на котором периметры красных и синих фигур отличались бы в полтора раза, можно даже по клеточкам (см. рисунок).

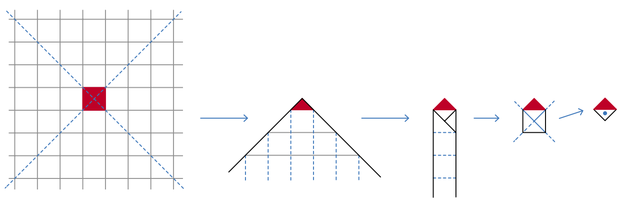


47. *Барон Мюнхгаузен утверждает, что можно выписать на доску в некотором порядке 9 различных цифр и поставить между некоторыми из них знак «+» так, чтобы результат был равен* 2023. *Не ошибается ли барон?*

Ответ: барон прав. Например, подойдёт сумма $1963+40+8+7+5$.

48. *В белом клетчатом листочке* 10×10 *одну клетку закрасили красным. Затем листочек сложили несколько раз по линиям сетки и диагоналям клеток, проткнули иголкой и развернули. Могло ли случиться, что внутри каждой белой клетки, не на сгибах, есть точка прокола, а внутри красной клетки прокола нет?*

Ответ: могло. Сложим листочек вдоль диагоналей красной клетки: получится фигура с красным треугольником в углу.



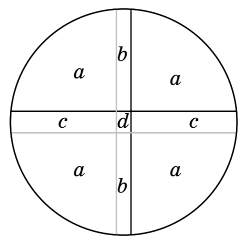
Если сложить эту фигуру по вертикальным линиям сетки, получится полоска из белых клеток с красным треугольником на конце. Теперь можно сложить эту фигуру по горизонтальным линиям и получить «домик» из многослойного белого квадратика и красного треугольника. Наконец, согнём полученную фигуру по диагоналям белой клетки – получится красно-белый квадратик. Если теперь сделать дырку внутри белой половины – мы проткнём все белые клетки, но не проткнём красную.

49. *Емеля перемещается только на печи, которая ездит на дровах – полено на километр – и вмещает* 60 *поленьев. Вчера Емеля выехал на печи из дома, на некотором расстоянии от него сделал склад поленьев, после чего вернулся обратно. Сегодня Емеля снова набрал поленьев, выехал из дома, проехал через склад... и не вернулся – кончились поленья. Как далеко от дома он мог оказаться? Найдите наибольшее возможное расстояние.*

Ответ: 80 км. Пусть Емеля сделал склад на расстоянии x километров от дома. Оставить на складе он мог максимум $60-2x$ поленьев. После того, как сегодня Емеля доедет до склада, у него в печке останется $60-x$ поленьев, то есть добавить он может не более чем x поленьев из $60-2x$ лежащих на складе. Если $x>60-2x$ (то есть $x>20$), то Емеля заберёт все поленья со склада и суммарно проедет $x+(60-x)+(60-2x)=$ $=120-2x<80$ километров. Если же $x\leqslant 60-2x$ (то есть $x\leqslant 20$), то после пополнения со склада у Емели в печке будет 60 поленьев, и суммарно он проедет $x+60\leqslant 80$ км.

Значит, Емеля мог оказаться максимум на расстоянии 80 км от дома, сделав склад из 20 поленьев в 20 километрах от дома.

50. *Круг разделили двумя перпендикулярными хордами на 4 части. Могли ли их площади равняться* 2022, 2023, 2024 *и* 2025 см^2?



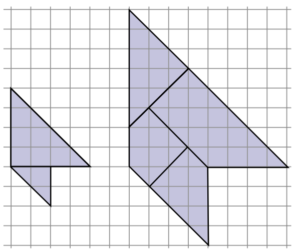
Ответ: нет. Ни одна из хорд не проходит через центр круга – иначе в силу симметрии у каких-нибудь двух частей круга совпали бы площади. Значит, отразив обе хорды относительно центра круга, получим разбиение на 9 частей, как показано на рисунке. Не умаляя общности предположим, что $a=2022$, $a+b=2023$, $a+c=2024$, $a+b+c+d=$ $=2025$. Но тогда $b=1$, $c=2$, а $d=0$, чего быть не может.

КУРСКАЯ ГОЛОВОЛОМКА

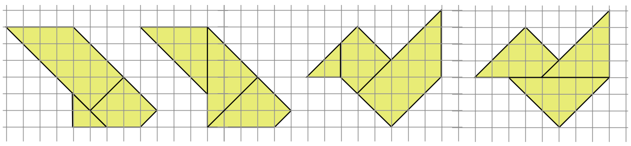
(«Квантик» № 7, 2023)

Две подобные фигуры

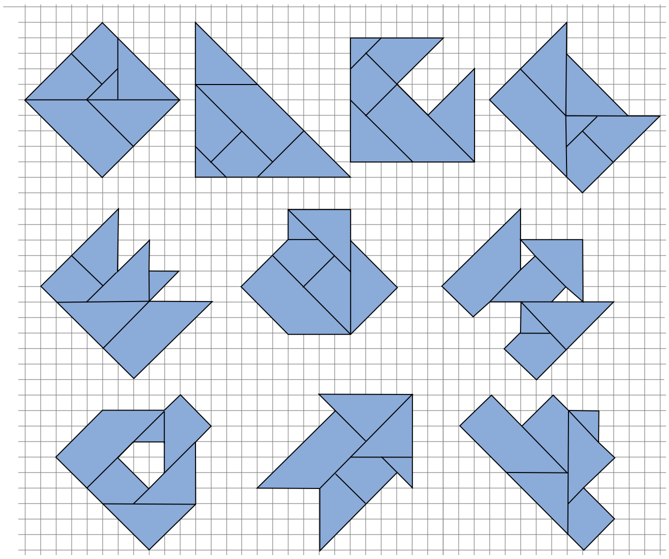
Посчитаем сумму площадей всех деталей: $9+16+8+8+7+2=50$. Попробуем поискать фигуры, у которых стороны отличаются в k раз, где k – целое число. Площади фигур при этом отличаются в k^2 раз. Тогда сумма площадей двух таких фигур (а значит, и всех деталей) должна делиться на k^2+1. Число 50 делится на $2^2+1=5$, на $3^2+1=10$ и на $7^2+1=50$. Однако во втором случае площади фигур должны быть равны 5 и 45, а в третьем – 1 и 49, а фигуры площадей 1 или 5 из имеющихся деталей мы составить не можем. Значит, размеры фигур не могут различаться ни в 3, ни в 7 раз. А вот фигуры, различающиеся по размерам в 2 раза, составить можно, см. рисунок.



Сборка одинаковых фигур



Сборка фигур по заданному силуэту



ВЕСЕННИЙ ЛЕДОХОД («Квантик» № 7, 2023)

Наводнения случаются в местах, ниже по течению от которых река не успевает пропускать весеннюю талую воду. В протяжённых реках, текущих в северном полушарии на юг, лёд вначале сходит в нижнем течении, а затем уже река вскрывается в верховьях. А вот на реках, впадающих в моря Северного Ледовитого океана, наоборот: тепло вначале приходит в верховья. Река вскрывается в верхнем течении, потоки воды и огромные льдины устремляются вниз и упираются в участки, где река ещё скована льдом. Образуется затор, стесняющий русло реки. Иногда это приводит к сильнейшим наводнениям, и приходится взрывать лёд, чтобы уменьшить заторы. В особенности это проявляется на больших реках без плотин, например, на могучей Лене. Много интересной информации о весеннем ледоходе на северных реках можно найти в статье М. Софера «Когда льдинам тесно в берегах» из журнала «Наука и жизнь» (2018, № 4, стр. 6–15).

МОЦАРТ, РЕПИН, КНУТ

Частично придумана история про Дональда Кнута. Если бы всё было действительно так, то при увеличении номера чека на 10 сумма увеличивалась бы в $2^{10}=1024$ раза. Уже за 41-ю ошибку Кнуту пришлось бы выписать чек более чем на 10 000 000 000 долларов.

Более удивительно, что почти всё остальное в истории – правда. Кнут начал даже не с одного цента, а с 256 – правда, удваивал сумму не с каждым чеком, а каждый год, пока она не достигла 327 долларов 68 центов.

Программа Кнута $\mathrm{T_EX}$ действительно работает очень хорошо, почти все серьёзные книги и статьи по математике оформляются с её помощью. А вот книгу «The Art of Computer Programming» Кнут пишет до сих пор – очередная часть вышла совсем недавно, в 2022 году.

См. также статью Г. Фельдмана «Дональд Кнут» в «Квантике» № 11 за 2014 год.

ТЕНИ

1. Да: например, если фонарь находится на высоте человека, а человек бежит от него или к нему; тогда тень вообще не движется.

2. Может, например, если проволока изогнута в той же плоскости, в которой находится источник света: проекция гнутой проволоки на пол при этом прямая (рис. 1). Тень от прямой проволоки можно сделать изогнутой только за счёт изогнутого экрана: например, как на рисунке 2.

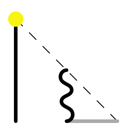


Рис. 1

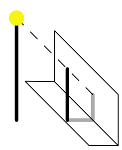


Рис. 2

3. Солнце очень большое, больше Луны, и конус тени за Луной – сужающийся. Поэтому тень Луны – область, в которой в данный момент наблюдается полное солнечное затмение – намного меньше, чем сама Луна. А вот полутень – область на Земле, где Луна закрывает Солнце только частично, – наоборот, примерно в два раза больше по диаметру (рис. 3).

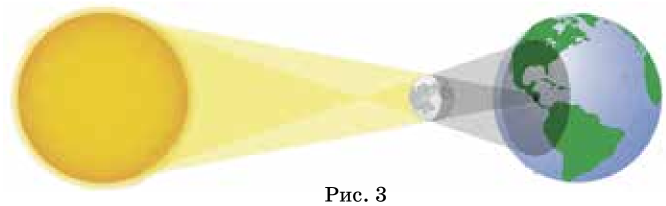


Рис. 3

Расстояния от Земли до Луны и Солнца немножко меняются из-за вытянутости орбит; если затмение случается в момент, когда Солнце ближе к Земле, чем в среднем, а Луна дальше от неё, чем в среднем, – тогда конус тени вообще не достаёт до Земли, и полного затмения вообще нигде не видно, а вместо него кое-где видно кольцевое.

Солнце очень далеко и от Земли, и от облака, поэтому лучи от каждой точки Солнца можно считать параллельными; тень от облака, если бы его освещал только самый левый краешек Солнца, была бы ровно того же размера и формы, что и само облако (рис. 4). Видимый угловой размер Солнца с Земли – полградуса. Поэтому тень, создаваемая левым краем Солнца, сдвинута относительно тени, создаваемой правым краем, на расстояние $(0{,}5/360)\cdot 2\pi \cdot 1\,\text{км} \approx$ $\approx 8\,\text{м}$. В этой области, освещённой одним краем и не освещённой другим, Солнце всё-таки будет видно (частично): эта область и называется полутень. Настоящая тень будет только там, где тени от всех «краёв» Солнца перекрываются. Поэтому она на 8 м меньше размера облака (рис. 5).

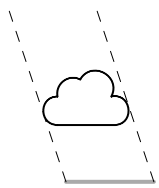


Рис. 4

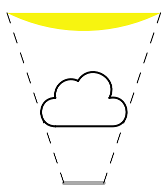
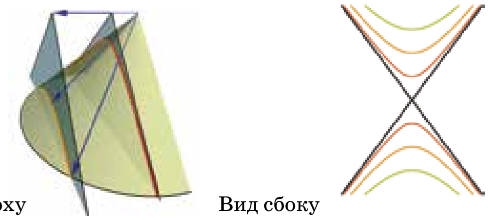


Рис. 5

4. Да, например, если мимо фонаря быстро пролетает бабочка, её тень на далкой стене движется гораздо быстрее её самой (если взять фонарь поярче и стену подальше). Никакого противоречия здесь нет. Быстрее скорости света не может двигаться никакой *материальный* объект, никакой предмет. А тень – не предмет! Хотя тень может двигаться быстрее скорости света, скорость передачи информации при этом всё равно ограничена скоростью света. Например, когда мы начинаем двигать фонарик, тень на очень далёкой стене начинает двигаться не сразу.

И СНОВА ПРО КОНИКИ

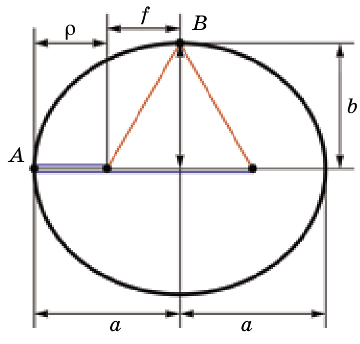
1. При растяжениях с центром в вершине конуса вертикальные плоскости переходят друг в друга, поэтому получающиеся гиперболы подобны. Преобразование подобия оставляет неизменными все углы; в частности, угол между асимптотами у этих гипербол один и тот же, а отличаются они только расстоянием между фокусами.



Вид сверху Вид сбоку

2. Площадь круга радиуса b равна πb^2, а эллипс получается из круга, если растянуть его вдоль одной оси в a/b раз. При таком растяжении каждый маленький квадратик внутри фигуры превращается в прямоугольник, его площадь увеличивается в a/b раз. Так же меняется при растяжении площадь любой фигуры (можно представлять себе, что она составлена из очень маленьких квадратиков). Поэтому площадь эллипса равна $\pi b^2 \cdot a/b = \pi ab$.

3. По определению эллипса, сумма расстояний до фокусов от точки A и от точки B одна и та же. Для точки A это число равно $\rho + (2a - \rho) =$ $= 2a$ (сумма длин синих линий). Значит, длина каждого красного отрезка, ведущего от фокуса к B, равна a. По теореме Пифагора, $f^2 + b^2 = a^2$. Значит, $b^2 = a^2 - f^2$.



ОЧЕРЕДЬ ИЗ СТЕКОВ

1. Будем называть один стек основным, а другой вспомогательным. Если нужно добавить элемент x, то в основной стек добавим его, а во вспомогательный – минимум из x и верхнего элемента вспомогательного стека. Если нужно извлечь элемент – извлекаем элемент из обоих стеков (и возвращаем лежавший в основном).

Тогда верхний элемент вспомогательного стека всё время равен минимальному элементу основного стека! Так что операция `readMin` может его и возвращать.

2. Если очередной встреченный нами символ – это «(», то будем добавлять его в стек. А если «)» – будем удалять верхний элемент из стека (это будет как раз открывающая скобка, соответствующая этой закрывающей скобке). Если в какой-то момент извлекать нужно, а нечего, или символы уже закончились, а в стеке остались элементы – последовательность была неправильной.

Кстати, тут вместо стека можно было бы обойтись и просто целочисленной переменной (ведь нам от стека нужно было только знать, сколько скобочек в нём лежит).

3. Будем действовать аналогично и считывать символы по одному. Если это открывающая скобка – добавляем её в стек. А если закрывающая – вынимаем верхний элемент из стека и смотрим, соответствуют ли эти две скобки друг другу. Если мы дошли до конца строки, не возникло несовпадений скобок и в стеке не осталось лишних скобок – последовательность правильная. (Отметим, что, в отличие от прошлой задачи, здесь заменить стек даже тремя целочисленными переменными не получится.)

РЕБУСЫ НА КУРОРТЕ

Вывеску надо читать «Apollon Cafe» («Кафе “Аполлон”»). Мама перебрала не все варианты – например, забыла вариант 888. На ключе написан номер 632 (переверните картинку, и станет ясно, что произошло).

РУССКИЙ МЕДВЕЖОНОК.
Избранные задачи 2022 года

1. Поскольку нам нужно установить значение исконно славянского слова *stop*, мы можем предположить, что в нём есть приставка *s-*. Тогда *-top-* – корень. Сравним с русским языком: в нём корень *-топ-* может быть синонимичен корню *-плав-* (*растопить* = *расплавить*). Тогда естественно считать, что исконно славянское польское слово *stop* имеет значение ‘сплав’. **Ответ:** (Г).

2. Стихотворение не случайно называется «Живая азбука». Поэт использует очень интересный приём: первые слова всех строк (то есть те слова, которые и делают азбуку азбукой) представляют собой названия живых организмов (не одушевлённых в грамматическом смысле, а именно живых). Это могут быть люди, гриб рыжик (соответствующие примеры в задачу не включены), животные или растения. Между тем в двустишии на букву К вместе с котом фигурирует книга – а книга не живая. Значит, именно этого двустишия на самом деле в «Азбуке» Саши Чёрного нет.

(Реально двустишие на К в «Живой азбуке» выглядит так:

Крыса мчится через мост.
Кот за ней, задравши хвост.)

Ответ: (В).

3. Очевидно, в приведённом отрывке речь идёт об отрезках времени, а не об астрономических телах. Ни одно из слов, приведённых в ответах, сейчас не используется для исчисления времени. Однако если вспомнить, что в современном языке слово *месяц* обозначает как небесное тело, так и период времени, можно предположить, что и слово *луна*, обозначающее тот же небесный объект, раньше также могло использоваться для измерения времени. **Ответ:** (В).

• Совмещение у слов типа *месяц* астрономического и временно́го значений вовсе не случайно: оно объясняется тем, что период обращения Луны вокруг Земли, то есть время от одного новолуния до другого, постоянен и удобен для построения календаря. Хотя привычные нам месяцы (январь, февраль и т. д.) не привязаны жёстко к обращению Луны, слово для календарного месяца во многих языках совпадает с названием естественного спутника Земли или родственно ему.

4. Каждое словосочетание, называющее персонажа из Машиной сказки, состоит из существительного и прилагательного. В словосочетаниях все буквы существительного являются первыми буквами прилагательного (из первых букв прилагательного можно получить существительное). Точно так же устроено только одно словосочетание в ответах: ***неторопливый енот***. Следовательно, **ответ:** (Д).