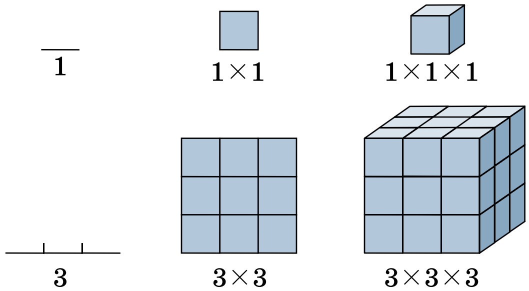
Никита Солодовников

КОВЁР СЕРПИНСКОГО

Если втрое увеличить сторону квадрата, его периметр увеличится втрое, а площадь – в $3 \cdot 3 = 9$ раз. Если же втрое увеличить сторону кубика, его объём увеличится в $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ раз.



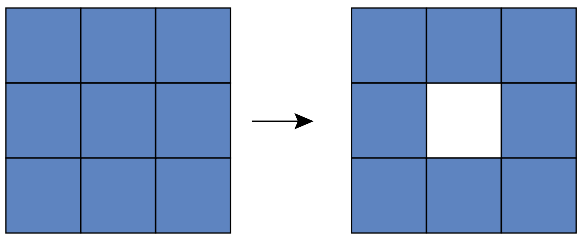
Закономерность верна в общем случае: при увеличении в k раз площадь двумерной фигуры увеличится в $k \cdot k$ раз, а объём трёхмерного тела – в $k \cdot k \cdot k$ раз. Более того, квадрат 3×3 *разбивается* на 9 квадратиков 1×1, а куб $3 \times 3 \times 3$ – на 27 кубиков $1 \times 1 \times 1$ (но так бывает уже не всегда: шар разбить на шарики нельзя).

Задача 1. Куб а) $3 \times 3 \times 3$; б) $4 \times 4 \times 4$; в) $12 \times 12 \times 12$ окунули в краску, а затем разрезали на единичные кубики. Сколько в каждом случае будет кубиков с тремя, двумя или одной окрашенной гранью? А сколько будет кубиков, у которых ни одна грань не окрашена?

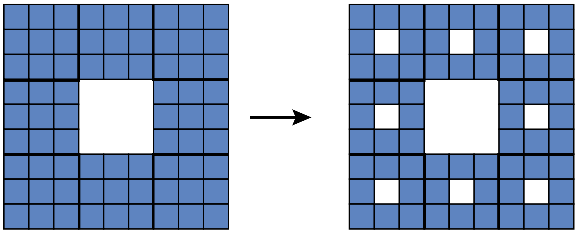
Задача 2. За неделю ежедневной стирки длина, ширина и высота куска мыла уменьшились вдвое. На сколько дней хватит оставшегося куска?

Ковёр Серпинского

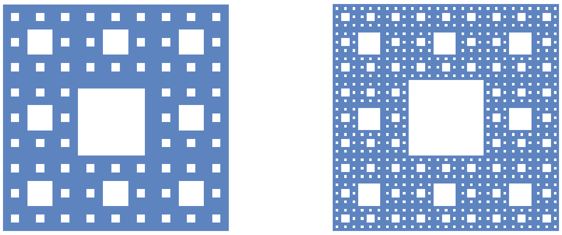
Построим на плоскости фигуру, которая при увеличении в 3 раза составляется не из 9, а из 8 копий исходной фигуры. Для этого разобьём квадрат на $9 = 3 \cdot 3$ квадратиков, а затем вырежем средний квадрат.



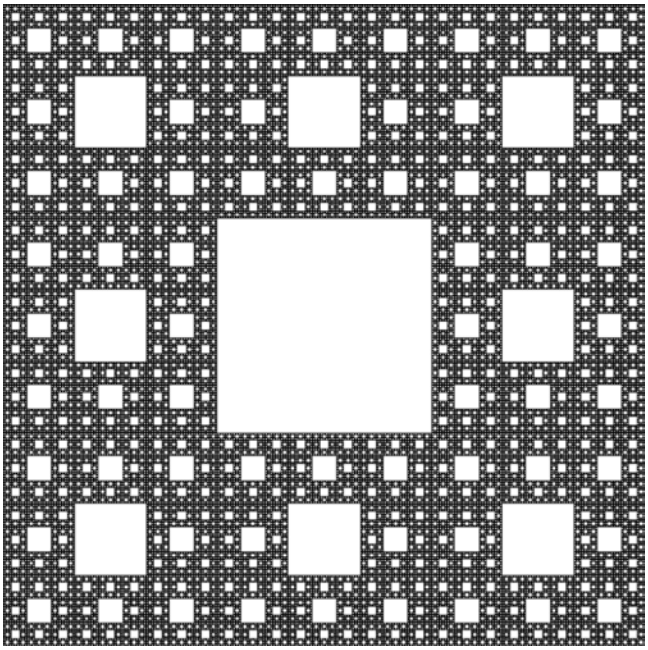
Фигура теперь состоит из 8 квадратиков. Но мы хотим, чтобы фигура состояла из 8 копий самой себя, а сама она – квадрат с дыркой. Для этого повторим операцию с каждым из восьми квадратиков: разобьём каждый на $3 \cdot 3$ частей и выкинем среднюю.



Фигура опять не состоит из копий самой себя, ведь в маленьких квадратах нет дырок. Но теперь дырке, возникшей на первом шаге, соответствуют дырки второго шага. Повторим операцию ещё и ещё раз.



...



Проделаем эту операцию бесконечное число раз. Получится эдакий «всюду дырявый квадрат».

Эту фигуру называют *ковром* или *квадратом Серпинского*. Её трудно представить, потому что неясно, что значит «повторить операцию бесконечное число

раз». Вдруг мы выкинули вообще все точки и вместо ковра у нас – пустое место? Оказывается, нет. Чтобы понять это, заметим: если точка была вырезана, можно указать номер шага, на котором это случилось.

Задача 3. Укажите точку квадрата, которая не будет выкинута ни на каком шаге. Она точно будет принадлежать ковру.

Итак, ковёр Серпинского состоит не из 9, а всего лишь из 8 своих втрое уменьшенных копий.

Площадь ковра Серпинского

Длину обычно измеряют у кривых, площадь – у двумерных фигур, а объём – у тел. Но ведь можно попробовать измерить площадь чего угодно, что изображено на плоскости. Например, площадь отрезка равна нулю: ведь его можно накрыть сколь угодно узким прямоугольником сколь угодно малой площади.

Найдём площадь ковра Серпинского! В нём повсюду дырки, трудно выделить в нём хоть один «целый» кусочек. Попробуем посчитать, как уменьшается площадь фигуры от шага к шагу при построении ковра.

Задача 4. Посчитайте площадь дырявых квадратов справа на рисунках внизу с. 10 и вверху с. 11, считая за единицу сторону наименьшего из квадратиков.

На первом шаге из 9 квадратов выброшен 1 средний, а значит, мы оставили $\frac{8}{9}$ исходной площади. На втором шаге мы повторили вырезание с каждым из 8 оставшихся квадратов, а значит – после выкидывания вторых по размеру дырок – снова *оставили лишь* $\frac{8}{9}$ *площади от предыдущего шага*. Это уменьшение будет повторяться на каждом шаге. Уже после шестого шага останется менее половины площади квадрата, так как $\left(\frac{8}{9}\right)^6 < \frac{1}{2}$. После двенадцатого – меньше четверти, и так далее. Мы сможем сделать площадь меньше любого положительного числа. Значит, площадь ковра надо считать нулевой: $9 \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{8}{9} \cdot \ldots = 0$.

Может быть, можно измерить длину границы ковра Серпинского?

Задача 5. Посчитайте длину границы каждой из фигур на рисунке вверху с. 11.

Как и в случае площади, посчитаем длину границы на каждом шаге. В начале она равна периметру квадрата. После первого шага к ней прибавляется периметр центрального квадратика. Затем – восьми квадратиков, каждый из которых втрое меньше выкинутого на первом шаге. Количество вырезаемых квадратиков увеличивается на каждом шаге в 8 раз. А периметр каждого вырезаемого квадратика уменьшается только в 3 раза. Значит, добавка к длине границы на каждом шаге увеличивается в $\frac{8}{3}$ раза! А сумма всех добавленных длин окажется бесконечно большой.

Итак, длина границы ковра бесконечна, а площадь самого ковра равна нулю.

Размерность

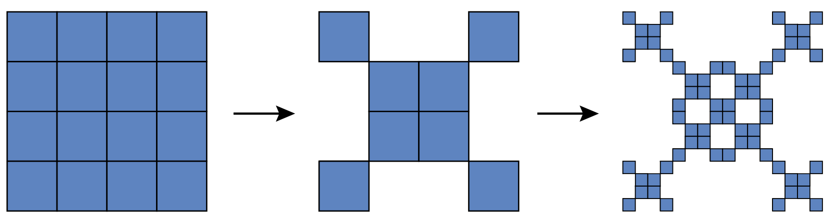
На примере квадрата и кубика отметим такое свойство размерности: *если фигуру размерности d, увеличенную в k раз, можно составить из копий изначальной фигуры, то их количество равно $k \cdot k \cdot \ldots \cdot k = k^d$.*

Так, при увеличении в $k = 3$ раза квадрат составляется из $3^2 = 9$ исходных квадратиков, $d = 2$, а куб – из $3^3 = 27$, $d = 3$. Какая же должна быть размерность ковра Серпинского? При увеличении в 3 раза он составляется из 8 копий, значит, размерностью должно быть такое число d, что $3^d = 8$.

Целые числа $d = 1, 2, 3\ldots$ не подходят: $d = 1$ недостаточно, а $d = 2$ слишком велико, так как $3^1 < 8 < 3^2$. Значит, размерность ковра где-то между 1 и 2. На это также указывают площадь и длина. Площадь у ковра нулевая, как у отрезка, а длина бесконечная.

В «дробной» размерности есть смысл. Отрезок, ковёр Серпинского, квадрат и куб – всё *самоподобные* фигуры: их можно составить из копий самих себя. «Дробную» размерность можно определить и для произвольных фигур, но мы этого делать здесь не будем.

Задача 6. Попробуйте сами оценить площадь, длину границы и даже найти «размерность» дырявой фигуры, изображённой на рисунке ниже.



Размерность береговой линии и реки

Как измерить длину кривой на плоскости? Можно откладывать шаги на кривой отрезками фиксированного размера, а затем оценить снизу длину кривой как (*число полных шагов*) × (*длина шага*). Чем меньше отрезок, тем больше будет число шагов – и тем точнее будет измерена длина кривой. Оценки длины окружности диаметра 1 с шагом 1/10 и 1/1000 будут отличаться не более чем на 1/100. Оказывается, многие естественные объекты хорошо описываются математическими фигурами дробной размерности. Длина береговой линии Великобритании или длина Енисея со всеми притоками растут как будто неограниченно, если измерять их со всё большей точностью: оценки не сходятся, в отличие от случая окружности. В крупном масштабе обнаруживаются всё новые изгибы берега, а в случае реки – ещё и прежде не учтённые притоки. Это даёт всё большую добавку к длине при уменьшении шага измерений. Как и для ковра Серпинского, для описания таких фигур подходит размерность, промежуточная между 1 и 2.

Источник: frexosm.ru на основе данных openstreetmap.org

Художник Мария Усеинова