

И СНОВА ПРО КОНИКИ

Окончание. Начало в № 8 за 2023 г.

Эллипс – парабола – далее везде. Фокус с фокусами

Разобравшись с задачками, Данька спросил:

– А вот если я буду всё сильнее наклонять плоскость – я ведь получу всё более вытянутые эллипсы, да? И потом они превратятся в параболу?

– Конечно, но какого эллипсы будут размера – зависит от того, как ты поднимаешь или опускаешь плоскость, то есть как при этом меняется расстояние от плоскости до вершины конуса. Можно менять так, чтобы «начало» у всех эллипсов было в одной и той же точке и конуса, и плоскости (рис. 9, а). А потом все плоскости с нарисованными на них кониками совместить. В этом случае, если конус широкий (угол раствора больше 90°), эллипсы, возникающие между появлением окружности и параболы, окажутся внутри параболы, а окружность – внутри эллипсов (рис. 9, б); если конус узкий – эллипсы возле общей точки будут сначала «толстеть», а потом «худеть» (но поперечный размер эллипсов в любом случае растёт) (рис. 9, в).

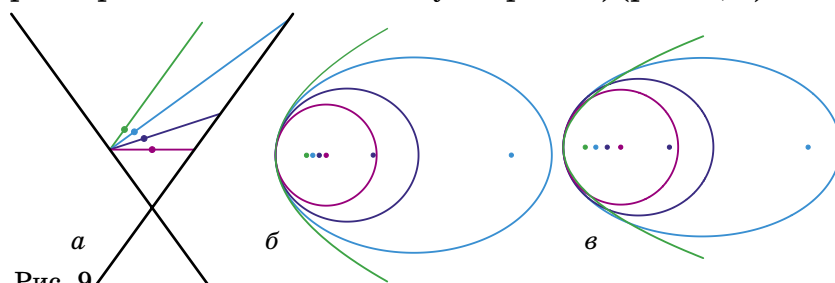


Рис. 9

– А если так менять, чтобы фокусное расстояние всё время оставалось одним и тем же?

– Можно. Но тогда мы не увидим ни настоящей окружности – она должна получиться бесконечно большой, ни параболы – она была бы бесконечно узкой, сольётся с отрезком (рис. 10).

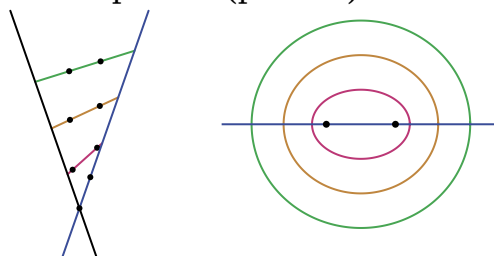


Рис. 10

– Как это – парабола превращается в отрезок?

– На самом деле не в отрезок, а в прямую... При таком способе сдвигания плоскости горизонтальная плоскость (и окружность) была бы бесконечно далеко вверху, а по мере увеличения наклона она бы «спустилась» до самого низа, и при таком угле, который нужен для параболы, проходила бы уже через вершину конуса. Видишь – на нашей картинке сечение всё ближе и ближе к образующей конуса. Когда совсем сольётся с ней – толщина у нашего эллипса исчезнет, зато и верхний край исчезнет, отрезок превратится в луч. Как будто бесконечно узкая парабола. Ещё и снизу «хвост» отрастёт, потому что наша плоскость уже и нижнюю часть конуса задела... В общем, это так себе способ: ни окружности, ни параболы не получается.

Давай лучше так двигать плоскость, чтобы угол наклона менялся, а расстояние p при этом оставалось постоянным – как на рисунке 11 слева. Тогда можно совместить картинку всех полученных эллипсов так, что и один из фокусов, и ближняя к нему точка будут закреплены, а второй фокус уползает вдаль... и эллипс превращается в параболу. А потом – когда ещё сильнее наклоняем – в гиперболу! Что происходит со вторым фокусом? Он теперь приближается из бесконечности, но с другой стороны (рис. 11)!

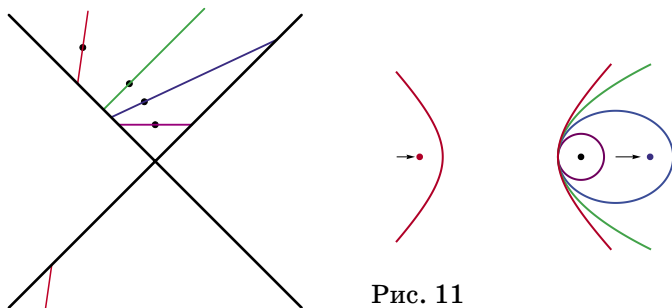
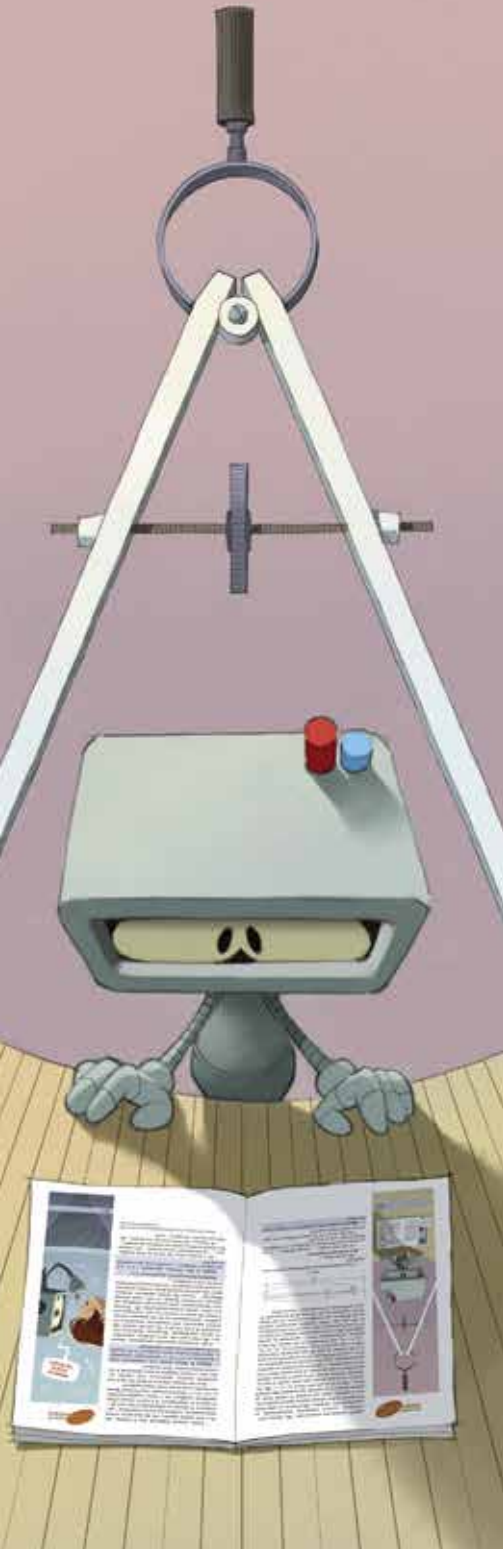


Рис. 11

– Круто! Гипербола – это вывернутый через бесконечность эллипс! У которого середина застряла на бесконечности.

– Кстати, я всегда так объясняла себе, почему у параболы директриса «вместо» второго фокуса. Давай проведём через дальний фокус эллипса прямую, перпендикулярную главной его оси (рис. 12). Возьмём какую-нибудь точку M вблизи первого, ближнего





фокуса и сравним d_2 – расстояние от неё до дальнего фокуса с расстоянием d_2' до этой перпендикулярной прямой. Если эллипс сильно вытянут, то эти два расстояния почти равны. Правда же? – «толщина» эллипса незначительна по сравнению с его «длиной». Получается, что наш очень вытянутый эллипс вблизи первого фокуса задаётся таким условием: сумма расстояний от любой точки до первого фокуса и до прямой, проходящей через второй фокус, одна и та же для всех точек: $d_1 + d_2' = c$. Но, поскольку эта новая прямая уже очень далеко и при удлинении эллипса уходит всё дальше, мерять расстояние до неё неудобно. А ведь можно вместо этого не прибавлять, а отнимать расстояние до какой-то другой прямой, параллельной ей, но находящейся слева от эллипса! (Чтобы все точки эллипса были по одну и ту же сторону от неё.) И такая разность тоже будет одна и та же для всех точек, потому что $d_1 - d_3 = d_1 + d_2' - d_{23} = c - d_{23}$: она отличается от той суммы, что была раньше, на постоянное число – расстояние d_{23} между прямыми. Ну а уж раз мы можем выбрать эту прямую и это расстояние как угодно, ничего не стоит подобрать её так, чтобы разность равнялась нулю! Конечно, для длинного эллипса это всё верно только приблизительно. Но чем более вытянутый эллипс, тем точнее, а для параболы – совсем точно.

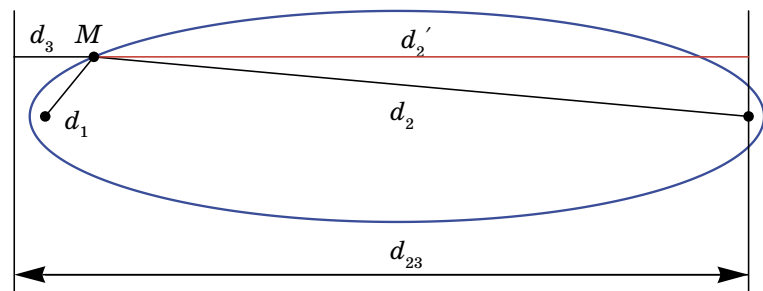


Рис. 12

Для знатоков координат

– А вот ещё вопрос, – сказал Данька. – У нас в школе тоже ведь были и параболы, и гиперболы. Но это какие-то не те, что ли?

– Почему же не те? Те самые! Чтобы в этом убедиться, реши такую задачку:

Задача 4. Найди, где у параболы $y = x^2$ фокус и директриса.

– Опять теорема Пифагора мне в помощь, да? Но у всех наших парабол, как мы выяснили, только один параметр, которым они могут отличаться, – расстояние p от фокуса до ближайшей точки (или $2p$ – от фокуса до директрисы). А в школе писали общее уравнение параболы аж с тремя коэффициентами: $y = ax^2 + bx + c$. Куда их столько, этих букв? Зачем они нужны, если это всё та же самая парабола?

– А на этот вопрос отвечать не буду! Это ты и сам прекрасно можешь догадаться, если хорошо понял, как устроены графики разных уравнений и что с ними можно делать. Пусть это будет

Задача 5. Какая буква или комбинация букв в уравнении $y = ax^2 + bx + c$ соответствует параметру p , характеризующему наши параболы? А что делают с этой параболой остальные параметры?

А вот гиперболы школьной программой обижены. На самом деле они, как и эллипсы, управляются двумя параметрами. Например, фокусным расстоянием $2f$ и всё тем же p . Но, как мы видели, при разных значениях этих параметров получаются гиперболы, расходящиеся вдали под разными углами. В школе же изучают только те из них, у которых этот угол (угол между асимптотами) равен 90° . Поэтому для справедливости давай решим про гиперболу две задачи посложнее! Решать «в лоб» через теорему Пифагора – сложно. Но можно применить хитрость вроде той, которая далёкий фокус эллипса превращает в директрису параболы: для этого надо рассмотреть далёкую точку гиперболы...

Задача 6. Найди фокусы гиперболы $y = 1/x$.

Задача 7. Как связаны параметры f и p для «школьных» гипербол, у которых угол расхождения ветвей 90° ?

– Ну а теперь, когда мы почти во всём разобрались, – удовлетворенно сказал Данька, – мы сможем быстренько понять, почему же планеты так летают?

– Э, Данька... До этого нам ещё так далеко... Давай пока считать, что просто – чудо!

Автор благодарит Глеба Бобкова-Нойманна (школа 179) за полезные замечания.



Художник Алексей Вайнер