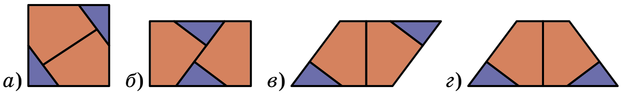
УПРЯМЫЙ КВАДРАТ («Квантик» № 5, 2023)



КОНКУРС ПО РУСКОМУ ЯЗЫКУ, IV ТУР

(«Квантик» № 7, 2023)

16. *Как-то маленький сын Петра Петровича принялся читать вслух важные документы, лежавшие на столе у отца. Услышав одно из слов, Пётр Петрович спросил сына: «А ты знаешь, что значит это слово?» – «Конечно, – не задумываясь ответил мальчик. – Это дядя, который украл собаку». Какое слово прочитал сын?*

...И не какую-нибудь там дворняжку, а дога! Так сын Петра Петровича объяснил для себя слово ***договор***.

17. *Приведите пример предложения, в котором слово «род» можно заменить словом «дух», и смысл предложения останется тем же самым.*

Лучше всего подходят предложения с оборотом ***в том же ...***, например: *Он очень любит шарады и другие словесные головоломки в том же роде (духе)*.

18. **3 Ю 3**

– Что за странная запись? – удивилась мама, заглянув в тетрадь по математике второклассника Лёвы.

– Мне так удобнее учить, – Лёва показал на соседние записи. – Я уже почти всё запомнил!

– Ах вот оно что! – рассмеялась мама. – Так у тебя неправильно написано: здесь нужно не «Ю», а _____.

Какие буквы должны стоять на месте пропуска?

Наверняка многие из вас слышали, как дошкольники и младшие школьники, уча таблицу умножения, старательно произносят что-нибудь вроде *пятижды пять* или *семижды девять*. Лёва – менее обычно – ошибся в обратную сторону: по ассоциации с *пятью пять*, *шестью шесть* и так далее у него получилось *трию три*. Но правильно всё-таки *трижды три* или, в Лёвиной системе записи, **3 ЖДЫ** 3.

19. *Назовите несерьёзную одежду и несерьёзный рисунок с одинаковой приставкой и синонимичными корнями.*

Несерьёзная одежда (не застёгивается тщательно на все пуговицы и крючки, а небрежно надевается одним движением) – это **накидка**. Несерьёзный рисунок (не готовая картина, требующая многих часов труда, а эскиз, созданный несколькими взмахами карандаша) – это **набросок**. Проверяем: в обоих словах выделяется одна и та же приставка *на-*, а глаголы *кидать* и *бросать* – близкие синонимы.

20. *Этим свойством обладают инфинитивы (неопределённые формы)* извести *и* навести, *но не обладают инфинитивы* провести *и* завести. *Им обладают инфинитивы* замести *и* вымести, *но не обладают инфинитивы* мести *и* подмести. *Какой (какие) из инфинитивов* скрести, наскрести, блюсти *и* переползти *также обладает (обладают) этим свойством?*

Инфинитивы *извести*, *навести*, *замести* и *вымести* (но не *провести*, *завести*, *мести* и *подмести*) обладают очень интересным свойством: их можно понять как формы повелительного наклонения некоторых других глаголов (*Извести меня о своём приезде; Навести прадедушку: он соскучился* и так далее). На материале задачи то же свойство можно сформулировать и по-другому: если к каждому из этих инфинитивов добавить *-ть*, получатся другие инфинитивы – *известить*, *навестить*, *заместить* и *выместить*.

Из инфинитивов *скрести*, *наскрести*, *блюсти* и *переползти* этим свойством обладает **только *скрести***: эту учформу можно понять как повелительное наклонение глагола *скрестить*, а вот глаголов *наскрестить*, *блюстить* и *переползтить* в русском языке определённо нет..

НАШ КОНКУРС, XI ТУР

(«Квантик» № 7, 2023)

51. *Представьте число* 2023 *как сумму девяти чисел, каждое из которых состоит только из цифр* 7.

Ответ: $777+777+77+77+77+77+77+77+7$.

52. *Квадрат* $N\times N$ *разбит на клетки* 1×1. *Изначально все они белые. Каждую минуту, пока это возможно, Квантик выбирает белую клетку, с которой соседствует по стороне чётное число чёрных клеток* (0, 2 *или* 4), *и красит её в чёрный цвет. Какое наибольшее количество клеток квадрата может закрасить Квантик?*

Ответ: все клетки. Пусть сначала Квантик закрасит N клеток на диагонали (у каждой из них 0 чёрных соседей). Далее можно закрасить диагонали, соседние с закрашенной (на них у каждой клетки ровно два чёрных соседа). Продолжая красить диагонали, соседние с уже закрашенными, Квантик закрасит весь квадрат.

53. *Петя написал на доске строчку из натуральных чисел. Каждое следующее больше предыдущего. Начиная с третьего, каждое число равно сумме двух предыдущих. Вася стёр первое число. Среди оставшихся чисел есть* 100. *Есть ли среди них* 600?

Ответ: нет. Пусть перед числом 100 шло число $a<100$ (возможно, a стёрли). После числа 100 идут числа $a+100<200$, $a+200<300$, $2a+300<500$, $3a+500$, $5a+800>800$, и так далее – из всех этих чисел может быть равно 600 только $3a+500$, остальные либо меньше 500, либо больше 600. В этом случае $3a=100$, но число a натуральное, а 100 не делится на 3 – значит, число 600 встретиться не могло.

54. *Боб решил отправить Алисе несколько бобров. Оказавшись на почте, Боб обнаружил, что не помнит, сколько бобров он положил в каждую из четырёх коробок. К счастью, на почте нашёлся старенький боброметр – устройство, позволяющее узнать суммарное количество бобров в коробках, помещённых в него. Однако его гарантийный срок давно истёк, и поэтому боброметр при измерениях может ошибаться, но не более чем на* 17 *бобров. Боб по очереди загрузил всевозможные пары коробок в боброметр и получил такие результаты:* 43, 99, 123, 141, 233, 255. *Сколько всего бобров Боб хотел отправить Алисе?*

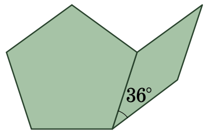
Ответ: 298. Пусть в коробках $a\leqslant b\leqslant c\leqslant d$ бобров (будем называть эти коробки A, B, C и D соответственно). Тогда справедливы соотношения:

$$a+b\leqslant a+c\leqslant b+c\leqslant b+d\leqslant c+d,$$
$$a+b\leqslant a+c\leqslant a+d\leqslant b+d\leqslant c+d.$$

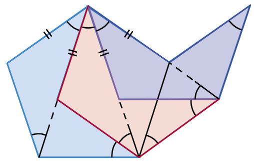
Для пары коробок C и D боброметр должен был показать самый большой результат, поэтому даже если ответ «255» был получен не для этой пары, количество бобров в коробках C и D всё равно отличается не более чем на 17 от 255. Аналогично, количество бобров в коробках A и B отличается не более чем на 17 от 43, в коробках A и C – от 99, а в коробках B и D – от 233. Значит, для одной из пар коробок A, D и B, C правильный результат измерений отличается не более чем на 17 от 123, а для другой пары – от 141.

Оценим теперь сумму $a+b+c+d$ двумя способами. С одной стороны, $(a+d)+(b+c)$ лежит в промежутке от $123+141-2\cdot17=230$ до $123+141+2\cdot17=298$ бобров, а с другой стороны, $(a+c)+(b+d)$ лежит в промежутке от $99+233-2\cdot17=298$ до $99+233+2\cdot17=366$. Значит, бобров может быть только ровно 298.

55. *К стороне правильного пятиугольника приставили ромб с углом* 36°, *как показано на рисунке. Разделите получившийся семиугольник на три равные (по форме и размерам) части.*



Ответ: см. рисунок.



Проведём диагонали, соединяющие верхнюю вершину пятиугольника с двумя противоположными его вершинами, и отложим на них отрезки, равные стороне пятиугольника. Оказывается, после разрезания, как на рисунке, получим три одинаковых равносторонних пятиугольника – синий, красный и фиолетовый (каждый составлен из двух равнобедренных треугольников: один с углами 36° при основании, а другой с углом 36° при вершине). Убедитесь в этом (подсказка: диагональ пятиугольника параллельна несмежной с ней стороне).

СКОЛЬКО РЕК ВЫТЕКАЕТ ИЗ ОЗЕРА

(«Квантик» № 8, 2023)

Ответ на этот фольклорный вопрос (см., например, книгу: Л. Г. Асламазов, А. А. Варламов «Удивительная физика») очень прост: из озера вода вытекает по самому низкому руслу.

Две реки, вытекающие из «молодого» озера, почти никогда не бывают одинаковыми по величине, не протекают всё время по породам, одинаково сопротивляющимся размыву. Со временем одна река быстрее углубит своё русло и понизит уровень озера настолько, что сток через вторую реку станет невозможным. Это относится к любому озеру: из Ладожского озера вытекает лишь Нева, из Онежского – одна Свирь, ...

Но из любого правила бывают исключения. Например, Энгозеро в Карелии: из него на высоте 71 м над уровнем моря вытекает река Воньга, а на высоте 71,4 м – река Калга. Обе впадают в Белое море. Самый известный пример – озеро Лешаскогсватнет на юге Норвегии. Из него на северо-запад в сторону Норвежского моря вытекает река Рёума, а на юго-восток – река Логен, которая впадает в реку Гломму, несущую воды в пролив Скагеррак между Данией и Швецией. Все эти примеры – из районов с каменными почвами.

Бывают и бессточные озёра – в них реки впадают, но ничего не вытекает, а расход воды идёт за счёт испарения. Примеры, которые «на слуху»: Чад (там, где «изысканный бродит жираф») в центральной Африке, Иссык-Куль в Киргизии, Баскунчак в России, Каспийское море. На бессточных озёрах часто добывают соль.

УСОВЕРШЕНСТВОВАННЫЙ ДУШ

Давление на одной глубине одинаковое. Если бы давление было различное, то горизонтальный столб воды между этими двумя точками двигался бы (и можно было бы, например, сделать вечный двигатель, поставив внутри этого столба колёсико с лопастями).

КОВЁР СЕРПИНСКОГО

1. В кубе со стороной k три грани будут окрашены у 8 угловых кубиков, две грани – у каждого из $k-2$ кубиков на каждом из 12 рёбер, а одна грань – у каждого из $(k-2)^2$ кубиков на каждой из 6 граней. Не будут окрашены $(k-2)^3$ внутренних кубиков. Видно, что одно число неизменно, второе увеличивается пропорционально размеру k, третье – как $k\cdot k$, а четвёртое – как $k\cdot k\cdot k$.

2. Исходный кусок мыла в $2\cdot2\cdot2=8$ раз больше остатка: по одной части на 7 дней прошедшей недели плюс еще одна часть – сам остаток. Значит, мыла хватит ещё на 1 день.

3. Угловая точка исходного квадрата.

4. 8 (из 9) и 64 (из 81).

5. $4\cdot3=12$, $4\cdot(3+1)=16$ справа внизу на с. 10 и $4\cdot(9+3)=48$ и $4\cdot(9+3+8\cdot1)=80$ – на с. 11.

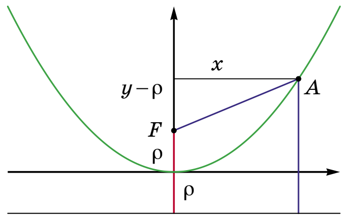
6. Указание. На каждом шаге площадь уменьшается вдвое и в пределе будет нулевой, а длина границы увеличивается в $\frac{3}{2}$ раза и в пределе будет бесконечной. Уменьшенная в 4 раза фигура состоит из 8 копий, а значит, размерность d такова, что $4^d=8$. Тогда $2^{2d}=8=2^3$, откуда $d=\frac{3}{2}$.

СЛУЧАЙ В ЮЖНОМ ГОРОДЕ

– Видишь ли ты, Лёня, чёткую границу между мокрым и сухим участком на ступенях? – продолжил Башковицкий. – Вода в одном месте высохла, а в другом – нет. Значит, ступени были прогреты неравномерно. Так могло случиться, только если дождь был кратковременный, а перед ним сияло жаркое солнце. И только та часть лестницы, которая оказалась в тени от парапета, осталась прохладной. Так что не было никакого затяжного дождя в день, когда был сделан снимок. Твой свидетель с фотоаппаратом лжёт.

И СНОВА ПРО КОНИКИ

4. Фокус лежит, конечно, на оси y, а директриса параллельна оси x. Обозначим расстояние от фокуса до вершины параболы через ρ, тогда координаты фокуса $(0, \rho)$. Для всех точек, в том числе для точки $(0, 0)$, расстояние до фокуса равно расстоянию до директрисы; значит, уравнение директрисы $y=-\rho$. Теперь возьмём любую другую точку A параболы, обозначим её координаты (x, y). Расстояние от A до директрисы равно $y+\rho$, а расстояние до фокуса найдём из теоремы Пифагора: $|FA|^2=x^2+(y-\rho)^2$. Раз $|FA|=y+\rho$, то $x^2+(y-\rho)^2=(y+\rho)^2$. Раскрывая скобки и сокращая, получим $x^2=4\rho y$. Для параболы $y=x^2$ это выполняется при $\rho=1/4$. Итак, координаты фокуса: $(0, 1/4)$; уравнение директрисы $y=-1/4$.

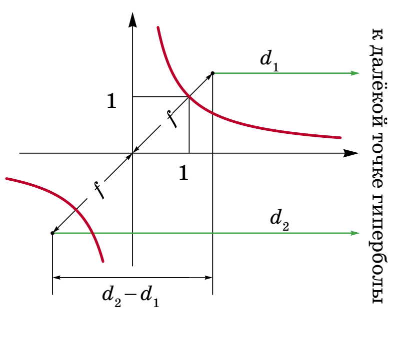


5. Параметр ρ определяет форму параболы. Он соответствует коэффициенту a. Как видно из решения задачи 4, $a=4\rho$. Уравнение параболы можно переписать в виде

$$y=ax^2+bx+c=a(x+b/(2a))^2+(c-b^2/(4a^2)).$$

При заданном a коэффициент b в первой скобке сдвигает график на $b/2a$ вправо, а вторая скобка поднимает его вверх. Так что параметры b и c отвечают за положение параболы на плоскости.

6. Ответ: $f=2$, координаты фокуса $(\sqrt{2},\sqrt{2})$. Во-первых, конечно, ось гиперболы наклонена под 45° к осям координат, и по точке (1, 1) мы понимаем, что разность расстояний до дальнего и ближнего фокусов равна $f+\sqrt{2}-(f-\sqrt{2})=2\sqrt{2}$. А дальше – хитрость: рассмотрим точку гиперболы, например, очень далеко справа. Тогда она почти на оси x, а расстояния от неё до каждого фокуса почти равны расстояниям от неё до проекций этих фокусов на ось x (потому что соответствующие прямоугольные треугольники очень вытянутые, катет много меньше гипотенузы). Их разность, как видно из рисунка, равна $d_2-d_1=2(f/\sqrt{2})$. Значит, $2(f/\sqrt{2})=2\sqrt{2}$; $f=2$.



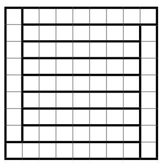
7. Для любой гиперболы разность расстояний до фокусов для точки, лежащей между ними, равна $(2f-\rho)-\rho=2(f-\rho)$. Для любой «школьной» гиперболы, рассматривая далёкую точку, как делали в задаче 6, получим для такой же разности выражение $d_2-d_1=2(f/\sqrt{2})$. Для всех точек гиперболы эти разности одинаковы; приравнивая их, получим $\rho=f(1-1/\sqrt{2})$.

ДЕНЬ РОЖДЕНИЯ ПО НОВОМУ СТИЛЮ

Логично предположить, что пока Рахманинов жил в России, то есть с 1873 года по 1917, он праздновал день рождения 20 марта. Но какой это был день календаря в европейских странах и в США, то есть по новому стилю? До 1900 года это было 1 апреля, а с 1900 года это было уже 2 апреля, потому что по новому стилю 1900 год не високосный. Это означает, что после переезда Рахманинов продолжил отмечать свой день рождения в «тот же» день. В России мы отмечаем его день рождения 1 апреля, а на его могиле указано 2 апреля, что, конечно, неправда.

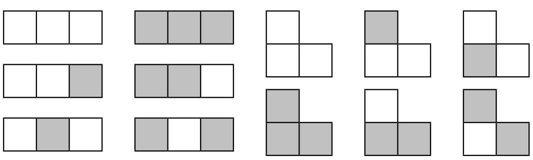
XXVIII ТУРНИР МАТЕМАТИЧЕСКИХ БОЁВ ИМЕНИ А.П. САВИНА.

Избранные задачи



1. Ответ: нет. Пусть квадрат разрезали так, как на рисунке. Чтобы из полосок сложить прямоугольник 8×9, нужно выбросить полоски общей площади 9. Однако все полоски состоят из 7 или 8 клеток, и суммарную площадь 9 из них получить нельзя.

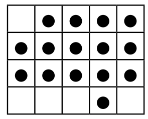
2. Ответ: нет. Каждая фигурка – это прямоугольник или уголок, на рисунке показаны все виды их раскрасок. Так как все грани куба одноцветны, то прямоугольники, у которых цвет центральной клетки отличается от цвета двух других клеток, не участвуют в оклейке. На оставшихся фигурках суммарно по 15 белых и чёрных клеток, этого не хватит для четырёх граней. Значит, у куба три белых и три чёрных грани.



3. Пронумеруем монеты по кругу числами от 1 до 8 и сравним пары (1, 5) и (3, 7).

1) Если весы в равновесии, то обе фальшивые монеты либо на весах, либо не участвуют во взвешивании. В любом случае они имеют номера одной чётности и не могут быть соседними.

2) В случае неравенства обе монеты на более тяжёлой чаше настоящие. Будем считать, что это пара (1, 5). Тогда сравним группы (2, 3, 4) и (6, 7, 8). Если они равны, то фальшивые монеты оказались на разных чашах и не являются соседними. Если же одна из групп тяжелей, например (2, 3, 4), то обе фальшивые монеты находятся на другой чаше, при этом монета 7 точно фальшивая, поэтому фальшивые монеты лежат рядом.



4. Ответ: при $n=15$. Коробку можно разделить прямой семью способами, для каждого есть два количества конфет с разных сторон от прямой. Значит, можно отделить не более 14 различных количеств конфет, поэтому конфет не больше 15. Пример см. на рисунке.

5. Ответ: при 4 мудрецах. Пусть всего мудрецов N, и им достались числа от 1 до N. Будем называть мудрецов в соответствии с числами на их лбах. В самом начале у мудреца 1 есть два варианта своего числа: 1 или $N+1$. У мудреца N тоже два варианта: 0 или N. Остальные мудрецы сразу понимают, какие у них числа.

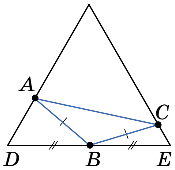
При $N=4$ если первым будет говорить мудрец 1 или 4, он не сможет назвать своё число. Если выпадет говорить первым мудрецу 2, то мудрец 4 уже не определит своё число. Ведь даже если ему придётся говорить после мудрецов 1 и 3, он не поймёт, с самого начала те знали свои числа или определили, услышав мудреца 2. А если первым будет говорить мудрец 3, то мудрец 1 не определит своё число.

Если $N\geqslant 5$, то пусть жребий выпал так, что первым говорит мудрец 2, а сразу после него – мудрец $N-1$. Они назовут свои числа, а так как эти числа не последовательные, то для мудрецов 1 и N неправильные варианты отпадут, поэтому далее все мудрецы назовут свои числа.

6. Ответ: масса Макара, на $\frac{100}{3}$ кг. Из условия следует, что средняя масса поросят и телят на 20 кг больше средней массы поросят и на 30 кг меньше средней массы телят. Поэтому количества поросят и телят относятся как $3:2$. Аналогично средняя масса козлят и телят на 25 кг больше средней массы козлят и на 75 кг меньше средней массы телят, поэтому количества козлят и телят относятся как $3:1$. Значит, козлят в 2 раза больше, чем поросят. Разность между средней массой поросят и средней массой козлят равна 50 кг. Чтобы найти среднюю массу поросят и козлят, надо эту разность поделить в отношении

$2:1$, то есть она на $\frac{100}{3}$ кг меньше средней массы поросят, а значит, и массы Макара.

7. Ответ: $30°$. Обозначим через DE сторону, на которой лежит точка B (см. рисунок). Так как $BA = BC$, $BD = BE$ и $\angle D = \angle E = 60°$, то либо треугольники ABD и CBE равны, либо сумма углов, противолежащих сторонам BD и BE, равна $180°$. Первый случай невозможен: по условию не равны соответствующие высоты этих треугольников, проведённые из вершин A и C. Значит, $\angle BAD + \angle BCE = 180°$. Тогда $\angle ABD + \angle CBE = (180° - \angle D - \angle BAD) + (180° - \angle E - \angle BCE) = 60°$, откуда $\angle ABC = 120°$ и $\angle BAC = \angle BCA = (180° - 120°) : 2 = 30°$.



8. Ответ: верно. Разделим торт на две равные части вертикальным разрезом (см. рисунок). Если в них поровну вишенок, то нужное разрезание найдено. Иначе пронумеруем клетки, как на рисунке, и по очереди будем менять цвета между собой у клеток с одинаковыми номерами (белая и серая части будут оставаться равными). После 18 таких шагов части поменяются местами и в белой части станет больше половины вишенок. Но на каждом шаге число вишенок в белой части меняется не более чем на одну, поэтому в какой-то момент их там будет ровно половина.

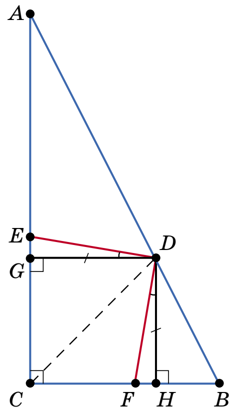
18	17	16	1	2	3
15	14	13	4	5	6
12	11	10	7	8	9
9	8	7	10	11	12
6	5	4	13	14	15
3	2	1	16	17	18

9. Ответ: 300 рыцарей. Заметим, что «Да» ответили рыцари, стоящие между людьми разного типа, и лжецы, стоящие между людьми одинакового типа, а остальные ответили «Нет». Поэтому если оба соседа любого жителя сменят тип, то его ответ останется прежним. Также если житель сменит тип вместе с одним своим соседом, то и он не поменяет свой ответ.

Пронумеруем всех стоящих в круге: 1, 2, 3, 1, 2, 3, ... Если все жители с номерами 1 и 2 сменят свой тип, то из сказанного выше следует, что никто не поменяет свой ответ. Поскольку турист смог определить, сколько в круге рыцарей, то такое изменение типов не меняет их количество, значит, среди жителей с номерами 1 и 2 по 200 рыцарей и лжецов. Аналогично 200 рыцарей среди жителей с номерами 2 и 3, а также среди жителей с номерами 3 и 1. Просуммировав эти количества, получим 600 рыцарей, при этом каждого жителя мы посчитаем дважды, поэтому всего в круге 300 рыцарей.

10. Ответ: Петя. Заметим, что после каждого хода количество фишек в вершинах либо увеличивается на 1, либо уменьшается на 1, поэтому перед ходом Пети всегда будет нечётное количество свободных вершин. Значит, среди блоков пустых вершин будет хотя бы один нечётной длины. Если Петя может сходить так, чтобы забрать призовые фишки, то он делает такой ход. Иначе Петя ставит фишку в крайнюю вершину нечётного блока, делая его чётным (первый ход – в любую вершину). После такого хода Вася тоже не сможет сходить так, чтобы забрать призовые фишки. Таким образом, Вася будет иметь возможность брать призовые фишки только после ходов Пети, когда и тот берёт призовые фишки. Значит, у Пети их всегда будет не меньше, чем у Васи, и он первым соберёт 100 призовых фишек.

11. Ответ: верно. В треугольнике ABC с прямым углом C построим биссектрису CD. Докажем, что биссектрисы DE и DF треугольников ACD и BCD равны. Заметим, что угол EDF прямой: он образован биссектрисами смежных углов. Опустим перпендикуляры DG и DH на катеты AC и BC соответственно (см. рисунок). Так как точка D лежит на биссектрисе угла C, то $DG = DH$. А ещё $\angle GDH = \angle EDF = 90°$, поэтому $\angle EDG = \angle FDH$. Значит, прямоугольные треугольники DEG и DFH равны по катету и острому углу, откуда $DE = DF$.



12. Выберем город A, из которого можно добраться до наибольшего числа других городов. Пусть из него нельзя добраться до какого-то города X. Тогда по условию из X есть путь в A, а значит, из X можно добраться также и до всех городов, до которых можно добраться из A. Но это противоречит выбору города A: ведь из X пути ведут в большее число городов. Значит, из A можно добраться до всех городов. Аналогично найдётся город B, в который можно попасть из всех остальных городов. Тогда, построив дорогу из B в A, мы получим требуемую схему: из любого города можно доехать до B, затем переехать в A, а оттуда добраться до любого другого города.