Артём Болотин

МЕТОД «МЭТРА», или ЗАЧЕМ СЛЕДИТЬ ЗА РАЗМЕРНОСТЬЮ?

– Чем занимаешься, Витя?

– Да вот над задачкой думаю.

Задача 1. *На листе нарисован прямоугольник со сторонами меньше* 1. *Петя измерил одну из его сторон, а Вася измерил площадь. У кого число получилось больше?*

Решение совсем простое. Пусть a и b – стороны прямоугольника, тогда Петино число – либо a, либо b, а Васино – ab. По условию $a<1$ и $b<1$, откуда $ab<a$ и $ab<b$. Таким образом, Петя получил большее число. Только я не могу понять, зачем Петя с Васей решили сравнивать свои числа? Они же имеют совершенно разный смысл, Петя измерял длину – условные метры, а Вася – площадь – квадратные метры! Это всё равно, что сравнить секунду и килограмм!

– Недаром у тебя по физике пятёрка, – улыбаясь, сказал Иван Андреевич, отец Вити, – но в математике нередко приходится сравнивать объекты, у которых, казалось бы, разная размерность. Даже есть метод, называемый методом «мэтра». Метод заключается в том, чтобы как раз свести всё к одной размерности.

– Метод «мэтра»? Откуда такое странное название?

– Мэтр – это учитель, мастер, а данный метод учит мастерскому подходу к единицам измерения. Да и слово созвучно с «метром», а мы как раз говорили о метрах, квадратных метрах... В общем, происхождение такого названия имеет несколько шуточный оттенок. Кстати, попробуй решить вот такую задачку.

Задача 2. *Квадрат со стороной* 1 *разрезан на прямоугольники. В каждом прямоугольнике выбрали одну из «кратчайших» сторон. Нужно доказать, что сумма длин всех выбранных сторон не меньше* 1.

– Так... Раз квадрат на прямоугольники разрезан, их стороны параллельны сторонам квадрата. А тогда они все не больше сторон квадрата, то есть не больше 1. Погоди, это же очень похоже на первую задачу. Только там стороны строго меньше 1 были, а тут – не больше. Поэтому теперь площадь каждого прямоугольника будет не больше, чем длина любой его стороны, в том числе и кратчайшей. Значит, если мы все кратчайшие стороны сложим – получим не меньше, чем сумму площадей всех прямоугольников. Но сумма-то как раз равна 1 – площади всего квадрата!

– Всё верно. Заметь, для решения снова понадобилось сравнить площадь и сторону, у которых «разные размерности». Вот ещё задачка с похожим сюжетом.

Задача 3. *Из квадрата со стороной* 1 *вырезали параллельно сторонам* n *прямоугольников. Нужно доказать, что их суммарный периметр не больше* $2n+2$.

– Что же, начнём переводить задачу на математический язык. Обозначим стороны прямоугольников a_i, b_i. По условию $a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \leqslant 1$. И теперь нужно показать, что

$$2(a_1+b_1) + 2(a_2+b_2) + \ldots + 2(a_n+b_n) \leqslant 2n+2,$$

или $(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\ldots+(a_n+b_n) \leqslant n+1$.

Витя призадумался, как лучше подступиться к задаче. Спустя некоторое время Иван Андреевич дал подсказку:

– Не кажется ли тебе, что единичка в правой части как-то выделяется? Подумай, откуда она взялась.

– Единице равна площадь нашего квадрата... И мы записали как раз $a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \leqslant 1$... Кажется, понял! Выходит, достаточно доказать, что $(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\ldots+(a_n+b_n) \leqslant n + a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$. Ну и логично предположить, что выполнены неравенства $a_i + b_i \leqslant 1 + a_ib_i$, а нужное неравенство – их сумма. Осталось доказать это... Действительно, неравенство $a_i + b_i \leqslant 1 + a_ib_i$ равносильно неравенству $(1-a_i)(1-b_i) \geqslant 0$, а оно верно, поскольку $a_i \leqslant 1$, $b_i \leqslant 1$, как следует из условия.

– Отлично! А теперь хочу предложить тебе свою любимую и, на мой взгляд, одну из самых показательных задач на метод «мэтра».

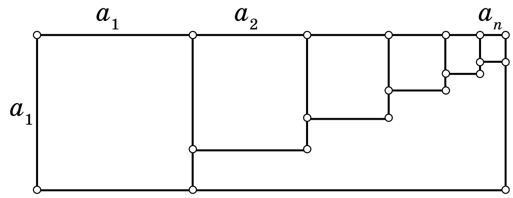
Задача 4. *Сумма нескольких положительных чисел равна* 1. *Надо доказать, что среди них найдётся число, не меньшее суммы квадратов всех этих чисел.*

– Пусть a_1, a_2, ..., a_n – наши числа. Логично, что если какое-то из этих чисел не меньше суммы квадратов всех чисел, то и наибольшее из чисел не меньше этой суммы квадратов. Итак, считаем, что a_1 – наибольшее, нужно доказать, что $a_1 \geqslant a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2$.

– Всё так. Заметь, в этом неравенстве слева стоят «метры», а справа «метры квадратные». Надо попытаться всё привести к одной размерности.

– Хм-м... Нам же дано, что $a_1+a_2+\ldots+a_n=1$. Тогда $a_1=a_1\cdot 1=a_1\cdot(a_1+a_2+\ldots+a_n)=a_1^2+a_1a_2+\ldots+a_1a_n$. А такое выражение не меньше чем $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2$, так как $a_1a_i\geqslant a_i^2$ в силу максимальности a_1. Здорово!

– Рад, что ты оценил! А ведь когда мы сравниваем квадратные метры с квадратными метрами, мы на самом



деле сравниваем какие-то участки площади, – Иван Андреевич нарисовал в тетради сына картинку, – в нашем случае площадь внешнего прямоугольника равна $a_1\cdot(a_1+a_2+\ldots+a_n)=a_1\cdot 1=a_1$, а внутрь него мы поместили квадратики площадью a_1^2, a_2^2, ..., a_n^2. Из этого рисунка сразу очевидно необходимое нам неравенство! Пока ты решал задачки, я вспомнил ещё несколько. Их тоже можно решить с помощью метода «мэтра». Иногда, правда, не удаётся нарисовать геометрическую картинку, помогающую решению, но выручает приведение неравенства к одной размерности – его становится проще решить алгебраически. Задачи немножко посложнее, порешай на досуге!

УПРАЖНЕНИЯ

1. Дано n положительных чисел с суммой, равной 1. Докажите, что квадрат одного из чисел не меньше суммы кубов остальных.

2. Дано n положительных чисел a_1, a_2, ..., a_n с суммой, равной 1. Известно, что $a_1\geqslant a_2\geqslant\ldots\geqslant a_n$. Докажите, что $1\geqslant a_1^2+3a_2^2+\ldots+(2n-1)a_n^2$.

3. Дано n положительных чисел a_1, a_2, ..., a_n с суммой 1. Пусть $a_1\geqslant a_2\geqslant\ldots\geqslant a_n$. Докажите, что одно из данных чисел не меньше, чем $a_1^3+3a_2^3+\ldots+(2n-1)a_n^3$.

4. Сумма положительных чисел a, b, c равна 1. Докажите, что $a^2+b^2+c^2+1\geqslant 4(ab+bc+ca)$.

5. Неотрицательные x и y таковы, что $x+y\leqslant 1$. Докажите, что а) $25xy\leqslant 4x+9y$; б) $(a+b)^2xy\leqslant a^2x+b^2y$.

6. Положительные a, b, c таковы, что $a+b+c=3$. Докажите, что $a^2+b^2+c^2\geqslant 3$.

Художник Мария Усеинова

Решения в следующем номере