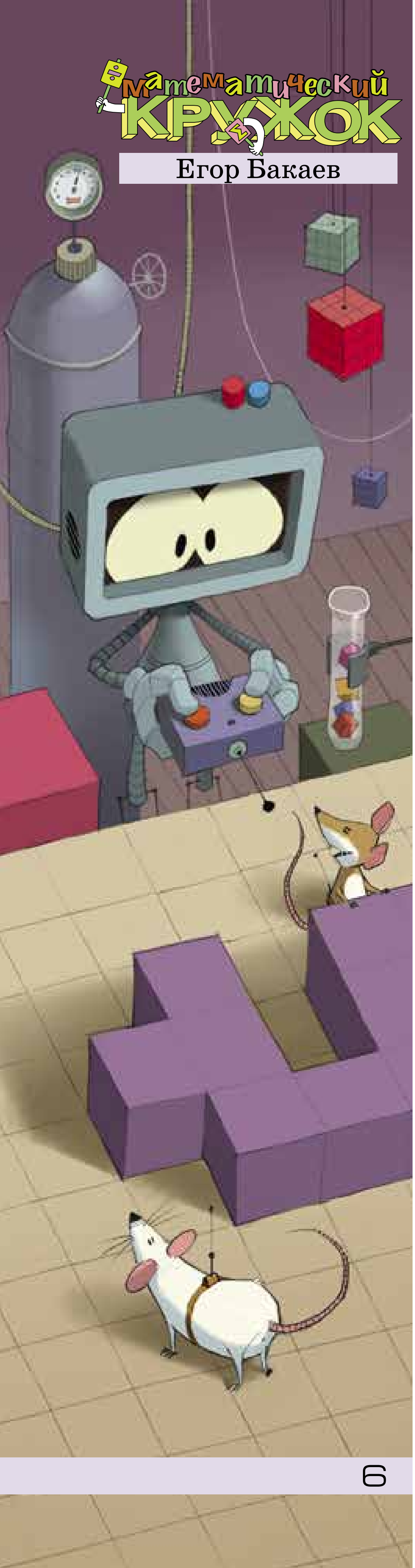


Егор Бакаев

ЧЁТНЫЙ ПЕРИМЕТР

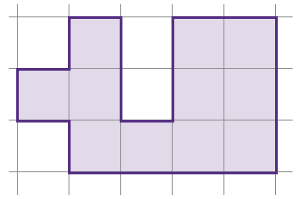


Рис. 1

Нарисуем многоугольник по линиям сетки, клетки которой – квадраты со стороной 1. Каким может быть его периметр? Оказывается, он всегда чётный. (Например, периметр многоугольника на рисунке 1 равен 20.) Мы приведём пять способов это доказать.

Клеточным многоугольником мы называем многоугольник, состоящий из нескольких целых клеток сетки. Фигура называется *многоугольником*, если её граница – одна замкнутая ломаная, которая себя не пересекает. Граница делит плоскость на две части – то, что внутри многоугольника, и то, что снаружи.

Способ 1. Обход границы + координаты

Будем обходить границу фигуры: начнём с некоторого узла (то есть с вершины какой-то клетки), и, обойдя всю границу, закончим в этом же узле. Ходы бывают четырёх видов: на 1 вверх, вниз, влево или вправо.

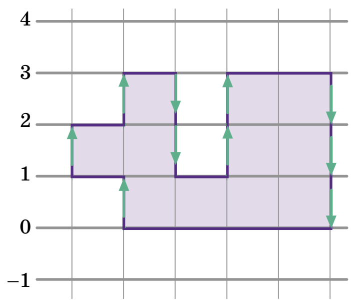


Рис. 2

Пронумеруем все горизонтальные линии сетки подряд идущими целыми числами снизу вверх (то есть введём координаты, рис. 2).

Тогда при ходе вверх номер горизонтальной линии (координата по оси y) увеличивается на 1, при ходе вниз – уменьшается на 1, а при сдвигах влево и вправо – не меняется. Так как мы закончили на той же линии, на которой начали, то номер линии увеличивался столько же раз, сколько уменьшался, поэтому ходов вниз и вверх было поровну. Значит, вертикальных ходов чётное количество.

Аналогично доказывается, что чётно и количество горизонтальных ходов. Получается, что чётно и общее количество ходов, а это и есть периметр.

Способ 2. Обход границы + шахматная раскраска

Участники математических кружков знают, что бывает полезна шахматная раскраска, особенно если

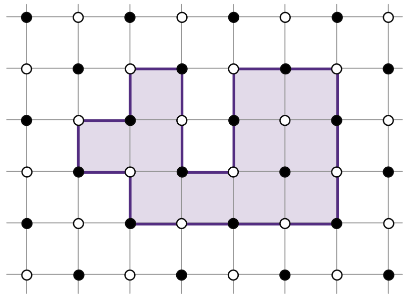


Рис. 3

в задаче говорится и про клеточки, и про чётность.

Раскрасим узлы сетки в чёрный и белый цвета так, чтобы соседние узлы были разного цвета, то есть в шахматном порядке (рис. 3). Выберем любой узел на границе многоугольника и начнём её обходить. При таком обходе чёрные и белые узлы чередуются. Начали обход мы с узла того же цвета, каким закончили (ведь это один и тот же узел). Отсюда следует, что мы чётное число раз меняли цвет, то есть чётное число раз переходили от одного узла к другому. Значит, периметр фигуры чётный.

Способ 3. Формула

Выведем формулу, связывающую S – площадь фигурки, P – её периметр и ещё некоторую величину.

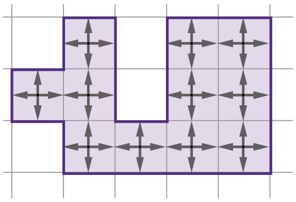


Рис. 4

Нарисуем в каждой клетке фигуры четыре стрелочки к сторонам клетки (рис. 4). Всего клеток S, поэтому мы нарисуем $4 \cdot S$ стрелочек. Часть этих стрелочек ведёт наружу, к границе многоугольника, и их будет ровно P. Остальные стрелочки ведут к внутренним перегородкам между клетками, к каждой такой перегородке ведёт по две стрелочки. Обозначим количество внутренних перегородок как I. Мы получили формулу: $4 \cdot S = P + 2 \cdot I$. (Например, для фигуры на рисунке 4 имеем: $S = 11$, $P = 20$, $I = 12$.)

Отсюда видно, что периметр P – это разность двух чётных чисел $4 \cdot S$ и $2 \cdot I$, поэтому он чётный.

Способ 4. Протыкаем «шампурами»

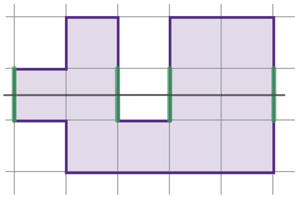
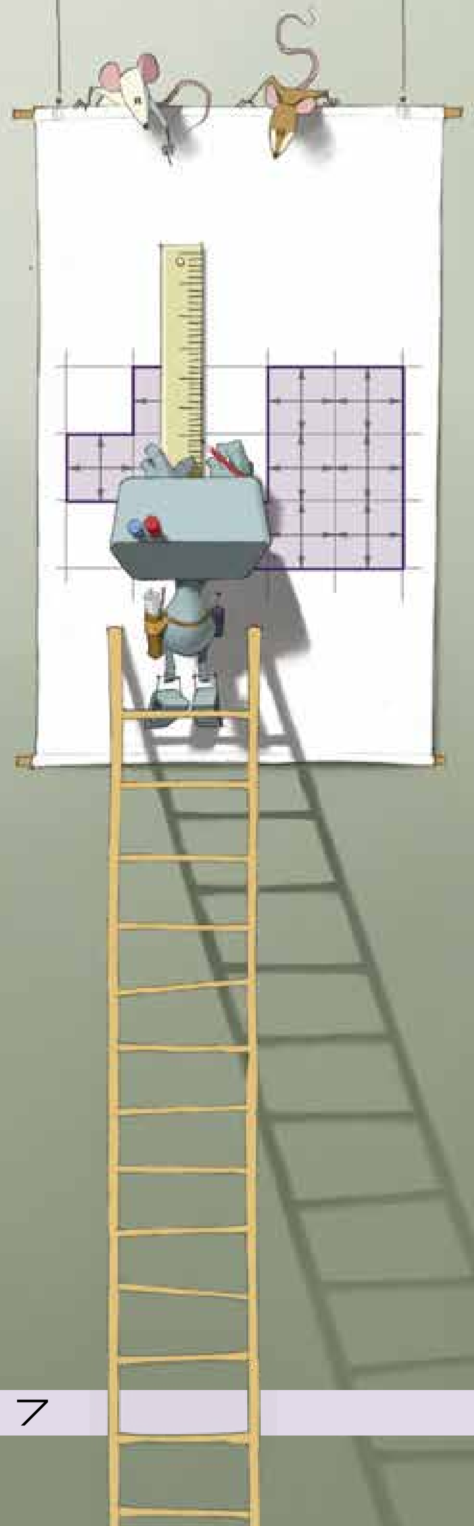
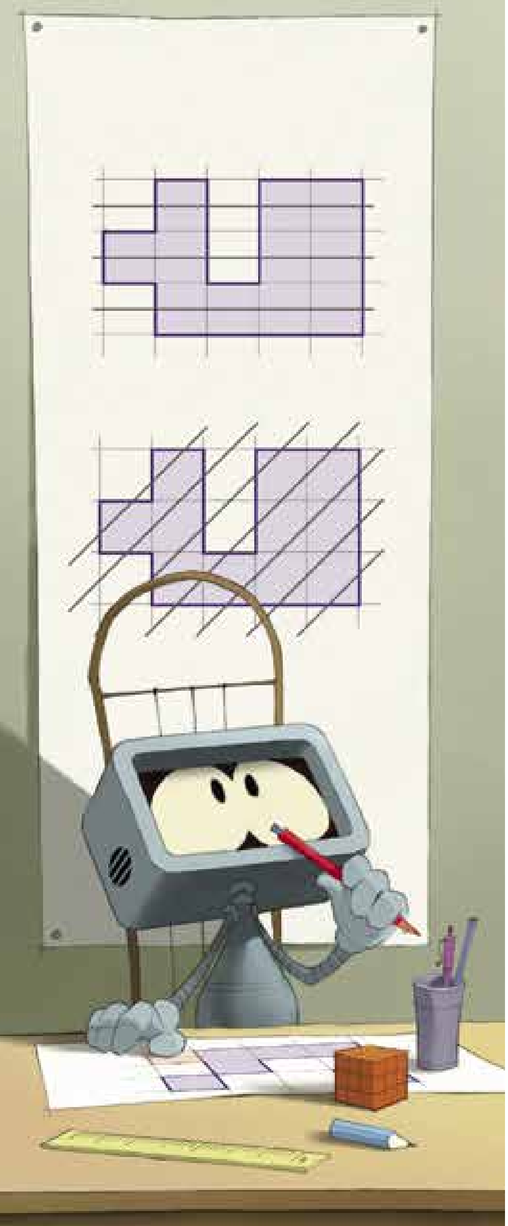


Рис. 5

Проведём прямую, проходящую параллельно линиям сетки, как на рисунке 5. Можно себе представить, что мы проткнули фигуру шампуром: он поочерёдно проходит снаружи и внутри фигуры. Поэтому шампур пересекает границу фигуры чётное число раз. Поставим теперь по шампуру в





каждой горизонтальной линии (рис. 6), эти шампуры проткнут все вертикальные отрезки границы фигуры. Поэтому их чётное количество! Аналогично, и горизонтальных отрезков на границе фигуры тоже чётное количество. А значит, и в сумме их чётное количество, то есть периметр фигуры чётный.

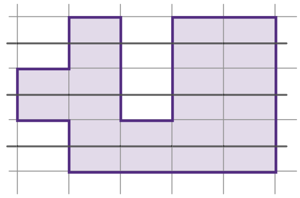


Рис. 6

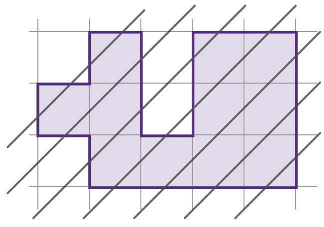


Рис. 7

Можно располагать шампуры и по-другому, например, вдоль диагонали (рис. 7).

Способ 5. Прибавляем по одной клетке

Будем строить фигурку пошагово: добавлять клетки по одной и показывать, что при этом сохраняется чётность периметра. Сначала была одна клетка и периметр был равен 4. На каждом шаге добавляем любую клетку. Посмотрим, как она примыкает к уже нарисованным ранее клеткам.

Возможны следующие случаи:

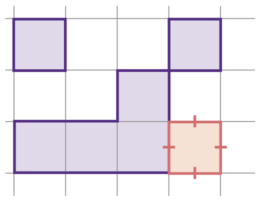


Рис. 8

1) Она примыкает к ним по одной стороне (в примере на рисунке 8 новая клетка красная). Тогда из периметра фигурки вычитается одна старая сторона и добавляется три новых, то есть периметр увеличивается на 2.

2) Клетка примыкает к ним по двум сторонам. Убирается две старых стороны и добавляется две новых, то есть периметр не меняется.

3) Она примыкает к ним по трём сторонам. Периметр уменьшается на $3-1=2$.

4) Она примыкает к ним по четырём сторонам (то есть закрывает собой дырку). Периметр уменьшается на 4.

5) Также клетка может и не примыкать к ранее нарисованным. Тогда периметр увеличится на 4.

Эти случаи можно было не рассматривать отдельно, а охватить их все следующим рассуждением. У новой клетки 4 стороны. Если она примыкает к старым клеткам по x сторонам, то добавляется $4-x$ новых сторон. Числа x и $4-x$ одинаковой чётности, то есть чётность количества пропавших сторон равна чётности количества новых сторон. А значит, чётность периметра не изменилась.

Отметим, что на промежуточных шагах фигурка (множество уже добавленных клеток) может и не быть многоугольником. Поэтому, в частности, этот способ решает задачу не только для многоугольников, но и для любых клеточных фигурок. (Можете подумать, использовали ли мы в изложенных способах, что фигурка является многоугольником.)

На эту тему рекомендуем также статью «Периметр и площадь на клеточках» в «Кванте» № 12 за 2019 год (сайт kvant.ras.ru). В ней обсуждается, например, такая задача: *какой наибольший периметр может быть у клетчатого многоугольника площади S*?

Отметим ещё, что чётность периметра клеточного многоугольника легко следует из формулы Пика (которую можно применить для любого многоугольника с вершинами в узлах сетки, причём его стороны могут идти и не по сетке). Согласно формуле, площадь равна $V+B/2-1$, где V – количество узлов сетки внутри многоугольника, а B – на границе. В случае клеточного многоугольника площадь целая, а число B – это периметр, и, как видно из формулы, B будет чётным числом. Формуле Пика была посвящена статья «Площади многоугольников и тающий лёд» Григория Мерзона в «Квантике» № 9 за 2018 год.

ЗАДАЧИ

В следующих задачах помогают идеи рассмотренных нами доказательств. Подумайте, в какой задаче какой подход применить. Советуем также подумать над задачами 3 и 17 из статьи «Чётность» Сергея Дориченко в «Квантике» №10 за 2013 год.

1. Прямая пересекает все стороны многоугольника и не проходит через его вершины. Может ли в этом многоугольнике быть а) 8; б) 9 сторон?

2. Найдите все клеточные многоугольники, у которых периметр больше площади а) в 4 раза; б) в 3 раза.

3. Многоугольник нарисован по линиям шестиугольной сетки, где каждая ячейка – правильный шестиугольник со стороной 1 (рис. 9). Докажите, что у него чётный периметр.

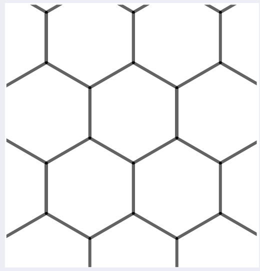


Рис. 9

4. Многоугольник нарисован по линиям треугольной сетки, где каждая ячейка – равносторонний треугольник со стороной 1 (рис. 10). Докажите, что его периметр той же чётности, что и количество клеток, из которых он состоит.

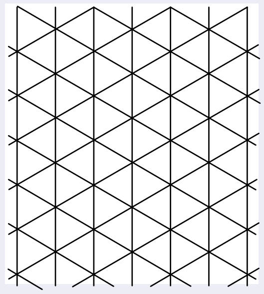


Рис. 10

5*. (Турнир городов, 2015) Секретная база окружена прозрачным извилистым забором в форме невыпуклого многоугольника, снаружи – болото. Через болото проложена прямая линия электропередач из 36 столбов, часть из которых стоят снаружи базы, а часть – внутри. (На рисунке 11 показан пример, с 8 столбами вместо 36.) Линия электропередач не проходит через вершины забора. Шпион обходит базу снаружи вдоль забора так, что забор всё время по левую руку от него. Каждый раз, оказавшись на линии электропередач, он считает, сколько всего столбов находится по правую руку от него (он их все видит). К моменту, когда шпион обошёл весь забор, он насчитал в сумме 2015 столбов. Сколько столбов находится внутри базы?

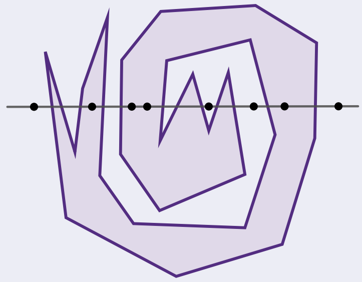


Рис. 11

6*. («Задачник «Кванта», М1953) Клеточный многоугольник сложен из доминошек 1×2. Докажите, что хотя бы одна его сторона имеет чётную длину.

Художник Алексей Вайнер