КОНКУРС ПО РУССКОМУ ЯЗЫКУ, V ТУР

(«Квантик» № 9, 2023)

21. *Как-то Соня с мамой стояли на остановке, и вдруг мимо них проехала маршрутка с яркой рекламной надписью.*

– «XY магазин в Мытищах!» Мама, а разве можно продавать радиоактивные вещества в магазине? – удивилась Соня.

– Маршрутка ехала очень быстро, ты не заметила восклицательный знак, – рассмеялась мама. – Там было написано «X! Y магазин в Мытищах!»

Что за надпись была на маршрутке?

Там было написано **«Ура! Новый магазин в Мытищах!»** Соня прочла начало надписи как «Урановый...» и удивилась: уран радиоактивен, продавать его в магазине никто не станет.

22. *С гласной – неаккуратное и неразборчивое; с Ь – мягкое и ценное. О каких двух словах идёт речь?*

Речь идёт о словах ***каракули*** (текст, написанный неаккуратным и неразборчивым почерком) и ***каракуль*** (мягкий и ценный овечий мех).

23. *Максимум* – 24.09. *А когда минимум?*

24.09, то есть *двадцать четвёртое сентября*, – самая длинная (по количеству букв) календарная дата. А самая короткая такая дата – **5.05, *пятое мая***. Других дат, состоящих из 25 и из 8 букв, в календаре нет (проверьте!).

24. *Однажды летом маленький Саша поехал с родителями отдыхать в _______. Там было очень тепло, и Саша думал, что эта страна называется так потому, что они поехали туда _____________. Заполните пропуски.*

Зачем из более холодной страны ехать в более тёплую? Конечно же, **греться**! Вот маленький Саша и подумал, что название ***Греция*** происходит от этого глагола.

25. *Одна маленькая девочка называла одно из помещений в доме, заменяя в нём второй согласный звук. Если учесть, для чего предназначено это помещение, получалось вполне логично. Напишите название этого помещения так, как его произносила девочка.*

Вместо *кухня* девочка говорила ***кушня***. Поскольку на кухне кушают, то есть едят, получалось и впрямь вполне логично.

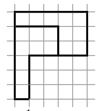
НАШ КОНКУРС, I ТУР

(«Квантик» № 9, 2023)

1. *На эскалаторе в метро ступеньки пронумерованы по порядку. На каждой пятой* (5, 10, 15, ...), *на первой и на последней ступеньках краской написаны их номера. Поднимаясь по эскалатору, Вася заметил три подряд идущие ступеньки, на которых были написаны номера. Он сложил эти три номера и получил некоторое число. Назовите последнюю цифру этого числа и объясните, почему она именно такая.*

Ответ: 2. Среди трёх подряд идущих ступенек лишь у одной номер может быть кратен 5, поэтому Вася заметил первую ступеньку, последнюю и «кратную пяти», причём она предпоследняя. Тогда номер последней ступеньки оканчивается на 1 или 6, а сумма оканчивается на ту же цифру, что $1+5+6=12$ или $1+0+1=2$, это 2.

2. *Разрежьте флажок на две равные по форме и размерам части.*



Ответ: см. рисунок.

3. *У Вани 4 яблока, у Коли – 41 яблоко, а у всех остальных мальчиков по 14 яблок. Мальчики могут поменяться между собой яблоками так, чтобы у всех стало поровну. Сколько всего мальчиков?*

Ответ: 17. Пусть сначала Коля отдаст Ване 10 яблок. Тогда у всех, кроме Коли, будет по 14 яблок, а у Коли $31=14+17$ яблок. Поскольку яблоки можно разделить между всеми поровну, «лишние» 17 яблок Коли можно раздать всем мальчикам (включая Колю) поровну. Но 17 нацело делится только на 1 и на 17, а мальчиков больше одного – значит, всего их ровно 17.

4. *У Фелониуса Грю живут* 33 *миньона, все они весят одинаково. Однажды один из них стащил у Грю банан и съел его, но Грю не знает, кто это сделал. У него есть большие чашечные весы без гирь, на которых он может взвешивать любое количество миньонов. Однако если миньоны оказываются на одной чаше весов, они ссорятся и больше на одну чашу одновременно их ставить нельзя. Как Грю за четыре взвешивания найти воришку, если после съеденного банана он весит больше остальных?*

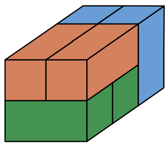
Пронумеруем миньонов. Первым взвешиванием на одну чашу поставим миньонов с номерами от 1 до 7, а на другую – от 8 до 14. Если одна из чаш перевесила, то воришка среди 7 миньонов на этой чаше. Взвесив три разные пары из этих семерых (по одному миньону на чаше), мы либо найдём перевесившего, либо поймём, что тяжёлый – оставшийся из семи.

Если же сначала было равновесие, то миньоны с 1 по 14 – честные. Взвесим теперь по 5 миньонов: на одной чаше с номерами от 15 до 19, на другой – от 20 до 24. Если одна из чаш перевесит, то двух взвешиваний по одному миньону на чаше хватит, чтобы найти воришку среди перевесивших пяти. Если снова равновесие – взвешенные миньоны не ели банан. Тогда третьим взвешиванием сравним миньонов 25, 26, 27 и 28, 29, 30. Воришка будет в перевесившей тройке или, при равновесии, в тройке 31, 32, 33. Взвесив четвёртым взвешиванием двух из трёх «кандидатов», мы узнаем, кто в этой тройке воришка.

5. *Каменщик выложил стенку без дырок и полостей из одинаковых кирпичей* $1\times1\times2$. *Но некоторые кирпичи он положил вдоль, некоторые поперёк, некоторые вертикально, то есть длинное ребро кирпича параллельно одному из трёх направлений. Могло ли оказаться, что кирпичей каждого из трёх типов поровну, если размеры стенки:* а) $3\times8\times10$; *б)* $3\times9\times10$?

Ответ: а) да; б) нет.

а) Взяв по два кирпича каждого из трёх типов, сложим блок $3\times2\times2$ (см. рис.), а из 20 таких блоков сложим стенку $3\times8\times10$.



б) В стенке $3\times9\times10$ должно быть по 45 кирпичей каждого вида. Мысленно выделим в стенке три слоя $1\times9\times10$. Любой кирпич лежит либо целиком в одном слое, либо в двух соседних слоях. Каждый из 45 кирпичей, лежащих в двух слоях, занимает в среднем слое ровно один кубик. Но оставшиеся 45 кубиков среднего слоя невозможно нацело разбить между кирпичами, которые лежат в слое целиком (занимая по 2 кубика), поэтому стенку $3\times9\times10$ сложить нельзя.

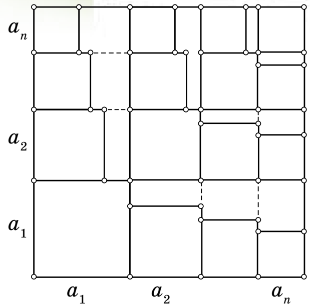
МЕТОД «МЭТРА», ИЛИ ЗАЧЕМ СЛЕДИТЬ ЗА РАЗМЕРНОСТЬЮ?

(«Квантик» № 10, 2023)

1. Первый способ. Пусть данные числа – a_1, a_2, ..., a_n. Без ограничения общности считаем, что a_1 – наибольшее. Заметим тогда, что $a_1^2 = a_1^2\cdot1 = a_1^2\cdot(a_1+a_2+\ldots+a_n) = a_1^3+a_1^2a_2+\ldots+a_1^2a_n \geqslant a_1^3+a_2^3+\ldots+a_n^3$. (Мы почти повторили решение задачи 4 из статьи. Можно было вывести требуемое, умножив неравенство задачи 4 на a_1.)

Второй способ. Рассмотрим параллелепипед $1\times a_1\times a_1$, его объём равен a_1^2. В него можно поместить по кубику со сторонами $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (см. рисунок из статьи), откуда следует требуемое.

2. Рассмотрим квадрат 1×1. В силу условия $a_1+a_2+\ldots+a_n=1$ в него можно поместить квадрат со стороной a_1, три квадрата со стороной a_2, ..., $2n-1$ квадратов со стороной a_n (см. рисунок). Отсюда и следует требуемое неравенство.



3. Первый способ. Рассмотрим параллелепипед $1\times1\times a_1$. В силу условия $a_1+a_2+\ldots+a_n=1$ в него помещаются кубик со стороной a_1, три кубика со стороной a_2, ..., $2n-1$ кубиков со стороной a_n (рисунок тот же, что в упражнении 2). Отсюда и следует требуемое неравенство.

Второй способ. Домножим неравенство из упражнения 2 на a_1. Получим, что a_1 не меньше $a_1^3+3a_1a_2^2+\ldots+(2n-1)a_1a_n^2$, что не меньше $a_1^3+3a_2^3+\ldots+(2n-1)a_n^3$, поскольку число a_1 – наибольшее из данных.

4. Число 1 в левой части имеет другую «размерность» нежели остальные слагаемые. Заметим, что $1=(a+b+c)^2$. С учётом последнего данное в условии неравенство превращается (после раскрытия скобок и приведения подобных) в равносильное $2a^2+2b^2+2c^2\geqslant 2ab+2bc+2ca$. Оно является суммой трёх неравенств $a^2+b^2\geqslant 2ab$, $b^2+c^2\geqslant 2bc$, $c^2+a^2\geqslant 2ca$. Первое получается, если раскрыть скобки в очевидном неравенстве $(a-b)^2\geqslant 0$ (квадрат числа всегда неотрицателен), аналогично получаются два других.

5. а) Дублирует доказательство пункта б).

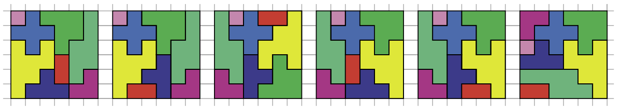
б) «Размерность» членов правой части на 1 больше «размерности» членов левой. По условию $a^2x+b^2y=(a^2x+b^2y)\cdot1\geqslant(a^2x+b^2y)\cdot(x+y)$. Поэтому достаточно доказать, что $(a^2x+b^2y)\times(x+y)\geqslant(a+b)^2xy$. После раскрытия скобок и приведения подобных остаётся $(ax)^2+(by)^2\geqslant 2abxy$, что мы уже доказали в упражнении 4 (сумма квадратов двух чисел не меньше их удвоенного произведения).

6. Сделаем в обеих частях квадратную «размерность»: $3(a^2+b^2+c^2)\geqslant(a+b+c)^2$. Раскрыв скобки и приведя подобные, получим неравенство $2a^2+2b^2+2c^2\geqslant 2ab+2bc+2ca$, уже доказанное в упражнении 4.

ГОЛОВОЛОМКА «ВЗАПЕРТИ»

(«Квантик» № 10, 2023)

Приводим все 6 решений задачи 2:



ВОЗДУШНЫЙ ШАРИК В АКВАРИУМЕ
(«Квантик» № 10, 2023)

Резко присядьте, стоя на весах. Вы увидите:
- до и после приседания весы покажут ваш вес;
- во время приседания показания уменьшатся;
- в конце приседания будет «удар» – показания веса скакнут вверх и вернутся к исходным.

Весы уменьшают показания, потому что во время приседания центр масс человека перемещается вниз. Какие силы действуют на человека? Во-первых, сила притяжения земли, во-вторых – сила, с которой весы давят на человека. Когда человек неподвижен, эти силы равны, а если движется вниз, это означает, что весы давят слабее, чем его притягивает сила тяжести.

Это же происходит с аквариумом. Когда шарик всплывает, центр масс «аквариума с водой» движется вниз (так как вода опускается, а шарик поднимается) – за счёт того, что сила, с которой давят на него весы, оказывается слабее силы тяжести в состоянии покоя. Значит, когда шарик начнёт всплывать, весы уменьшат показания, а когда всплывёт, вернутся к исходным.

ФЕРЗЬ И ЦЗЯНЬШИЦЗЫ

Комментарий. Со словами на ленте, сохраняющимися при таких заменах, наши герои встречались в статье «Слова на ленте» в «Квантиках» №5 и 6 за 2020 год. Получающееся в этой игре слово называется *словом Фибоначчи*.

Рассказ про те же игры с другой точки зрения – с числами Фибоначчи и золотым сечением $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ – читайте в «Кванте» № 7 за 1984 год: А. Матулис, А. Савукинас «Ферзя – в угол, "цзяньшицзы" и числа Фибоначчи».

Как оказывается, проигрышные клетки верхней цепочки можно найти так: их координаты – это последовательность целых частей

$$x_n = [\varphi n],\ \ y_n = [\varphi^2 n] = [(\varphi+1)n].$$

Анализ этой же игры имеется в статье, вышедшей в 1936 году в 8 выпуске первой серии «Математического просвещения»: И.В. Арнольд «Об одном свойстве числа $\tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$».

ДВА АВТОМОБИЛЬНЫХ ЗЕРКАЛА

Эта машина праворульная, но едет по дороге с правосторонним движением. Зеркала отражают дорогу так, что водитель может видеть в нижнем зеркале, что происходит впереди на встречной (левой) полосе.

ЛИСТЬЯ В ШУБКАХ

Снег падал, конечно, везде – значит, он растаял везде, кроме как на листьях. Выходит, не снег оказался шубкой для листьев, а листья – шубкой для снега, защищая его от плитки, которая, видимо, своим теплом растопила снег везде, где с ней был прямой контакт.

МЕРКУРИЙ И ВЕНЕРА

1. Из-за очень медленного вращения Меркурия вокруг оси день на нём длится целый меркурианский год, или 3 земных месяца. И столько же длится ночь. Поэтому днём поверхность очень сильно нагрета: Солнце примерно в 3 раза ближе, чем к Земле, и греет в $3^2 \approx 10$ раз сильнее. А ночью близость Солнца не спасает от холода. К тому же на Меркурии нет атмосферы, смягчающей перепады температуры, а поверхность обладает малой теплопроводностью – нагревается и остывает только слой толщиной около 1 м, – так что при смене времени суток температура поверхности меняется очень быстро.

На Венере, наоборот, атмосфера такая плотная, что температура везде одинаковая, как в термосе. Углекислый газ, из которого в основном состоит атмосфера Венеры, пропускает солнечный свет к поверхности, но очень плохо выпускает обратно наружу тепловое (инфракрасное) излучение. Получается парниковый эффект: равновесие между получаемой и отдаваемой наружу энергией достигается только при очень высокой температуре.

2. Надо заботиться о том, чтобы аппарат не перегрелся не только при посадке на Меркурий, но и во время полёта, но это мелочи по сравнению с ядовитой атмосферой Венеры, разъедающей любой материал за пару часов. А главная проблема – в притяжении Солнца. Хотя оно помогает попасть к Меркурию, из-за этого притяжения набирается огромная скорость, и летящий от орбиты Земли космический аппарат пронесётся мимо Меркурия, не успев его даже сфотографировать толком! Чтобы погасить такую скорость, нужно очень много энергии – не хватит никаких двигателей. Приходится пускаться на хитрости – применять манёвры гравитационного торможения, используя энергию движения Венеры и самого Меркурия: чтобы улететь подальше от Солнца, используют гравитационный разгон на планетах, а тут – то же самое делается в другую сторону. Даже для того, чтобы выйти на орбиту вокруг Меркурия (а не то что сесть на него!), «Мессенджеру» потребовалось более шести лет – всего в полтора раза меньше, чем «Новым горизонтам» для полёта к Плутону.

3. Объём Марса больше объёма Меркурия в $1{,}4^3 \approx 2{,}74$ раза. А масса у него всего в 2 раза больше. Поэтому плотность Марса меньше плотности Меркурия почти в 1,4 раза. Меркурий вообще почти рекордсмен – из всех планет только у Земли плотность чуть-чуть больше.

Это потому, что, когда Солнечная система образовывалась, в протопланетном облаке тяжёлые фракции (более тяжёлые атомы и пылинки) быстрее излучали («тратили») энергию и опускались вниз, ближе к Солнцу. К тому же, когда Солнце зажглось, лёгкие атомы и молекулы, оказавшиеся внутри Солнечной системы, «выдуло» солнечным ветром из ближних окрестностей Солнца вдаль, к орбите Юпитера. А ещё недообразовавшиеся планеты «собирали» по дороге всё, что встречалось им на пути.

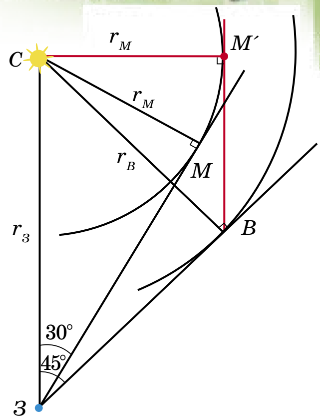
Поэтому теперь ближние к Солнцу планеты состоят из более тяжёлых элементов, вплоть до железа, а дальние – из более лёгких, начиная с Юпитера – в основном из водорода. Меркурий плотнее Венеры, а Венера плотнее Марса.

Почему же Земля обогнала и Венеру, и даже Меркурий? Она состоит из немного более лёгких элементов («материалов»), но из-за её большой массы эти материалы в глубине Земли находятся под гораздо бо́льшим давлением внешних слоёв, и поэтому сжаты сильнее.

4. а) Дело в том, что Меркурий и Венера ближе к Солнцу, чем Земля. Нарисуем Солнце (С), Землю (З) и орбиту, например, Меркурия (М). Проведём от Земли касательные к этой орбите. С Земли максимальный угол между Меркурием и Солнцем наблюдается тогда, когда Меркурий оказывается в точке касания – это положение называется *элонгация*. При этом угол «Земля–Меркурий–Солнце» равен 90°, а угол элонгации – угол «Меркурий-Солнце-Земля» – заведомо меньше 90°.

б) Планеты, которые дальше от Солнца, чем наблюдатель, могут отклоняться от Солнца на любой угол, даже на 180° (это называется *противостояние*). Поэтому при наблюдении с Меркурия и Венера, и Земля могут быть даже в противоположной стороне неба.

в) При наблюдении с Венеры Земля тоже может быть где угодно. Покажем, что на Венере угол элонгации Меркурия равен 45°. Подчеркнём что для Венеры Меркурий находится в элонгации (в красной точке M' на рисунке) совсем не в тот момент, что для Земли (в точке M). Из условия задачи мы знаем, что $\angle СЗМ = 30°$ и $\angle СЗВ = 45°$, откуда $r_М/r_З = 1/2$ и $r_В/r_З = 1/\sqrt{2}$. Тогда $r_М/r_В = 1/\sqrt{2}$, а значит, $\angle СВМ'$ тоже равен 45°.



Чтобы задача легко решалась, мы чуть подправили углы элонгаций. Более точно, угол элонгации Меркурия – 28°, Венеры – 48°, угол элонгации Меркурия на Венере – около 40°.

«СПРАВЕДЛИВЫЙ» ЧАЙНИК

1. Наливаем две чашки полностью; выливаем из одной из них чай обратно в чайник; наливаем две пустые чашки полностью.

2. Выливаем всё в чашки № 1 и № 2 (в каждой будет полчашки); чашку №1 выливаем обратно в чайник; выливаем чайник в чашки № 3 и № 4 (в каждой будет 1/4 чашки); выливаем чашку № 2 обратно в чайник; выливаем чайник в чашки № 1 и № 2 (в каждой будет 1/4 чашки).

3. а) Разливаем чай из трёхносого чайника в три пустых стакана. Сливаем весь налитый чай в один стакан, он будет полон. Разливаем чай из двуносого в два пустых стакана, затем содержимое одного из них выливаем в другой.

А можно иначе: сначала из трёхносого чайника выливаем чай поровну в два стакана и двуносый чайник (если там есть место), а потом из двуносого – доливаем доверху эти два стакана.

б) Сначала разливаем чай из трёхносого чайника по трём пустым стаканам. Затем весь этот налитый чай сливаем в один стакан. Он будет полон. Затем из двуносого чайника разливаем чай по двум пустым стаканам. После чего чай в одном из этих двух стаканов переливаем в пустой трёхносый чайник. Теперь у нас на столе три стакана: один – полный чаем, другой – налитый наполовину и третий – пустой. Осталось перелить чай из полного стакана в двуносый чайник, а потом разлить этот чай в два пустых стакана.

А можно так: сначала из двуносого чайника переливаем жидкость поровну в стакан и трёхносый чайник (и один стакан у нас уже готов), а потом из трёхносого чайника – поровну в два оставшиеся стакана и двуносый чайник.