XVIII ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТУРНИР

Избранные задачи

Турнир проводится Кавказским математическим центром Адыгейского госуниверситета и Республиканской естественно-математической школой (Адыгея) каждый сентябрь во Всероссийском детском центре «Орлёнок». В XVIII Турнире участвовали более 200 школьников с 7 по 11 класс. Приводим избранные задачи лиги «Старт» (полный отчёт тут: adygmath.ru).

АРИФМЕТИКА И АЛГЕБРА

1. (*Ярославские дистанционные игры*) Используя цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6 (в любом порядке) по одному разу, при помощи скобок и знаков арифметических действий получите выражение, равное 2023.

2. (*С. Токарев*) Любой отрезок, длина которого больше 9 см, но меньше 11 см, будем называть *практически дециметровым*. Какую наибольшую длину может иметь отрезок, который нельзя разбить на практически дециметровые?

3. (*С. Волчёнков*) В последовательности из 2023 чисел первое число равно 1, а последнее равно 2. Каждое из остальных чисел на 1 меньше произведения двух соседних с ним чисел. Чему равна сумма всех чисел последовательности?

4. (*Д. Кузнецов*) Натуральные числа a и b таковы, что $a^2+b^2+1=2(ab+a+b)$. Докажите, что a и b – точные квадраты натуральных чисел.

5. (*С. Волчёнков*) В записи 101-значного числа есть только две цифры: 1 и 2. Докажите, что можно вычеркнуть одну цифру так, чтобы получившееся 100-значное число делилось на 11.

6. (*Задача из Хорватии*) На столе лежат 2023 кучки камешков, в каждой из которых изначально находится по одному камешку. Можно выполнять ходы следующего вида: выбрать любые две кучки, взять из каждой кучки равное количество камешков и сформировать из них новую кучку. Найдите наименьшее число кучек, которые можно получить за конечное число ходов.

XVIII ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТУРНИР
Избранные задачи

Материал подготовили: Д. Мамий и составители лиги «Старт» Е. Бакаев, К. Бондаренко, С. Дориченко, С. Волчёнков, Ю. Карпенко, Д. Кузнецов, Н. Лопес Косме, А. Скоркин.

ЛОГИКА, ИГРЫ, КОМБИНАТОРИКА

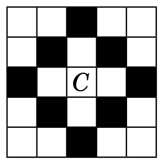
7. (*Задача из Китая*) Клетчатая полоска $1\times n$ составлена из палочек длиной в сторону клетки. Какое наименьшее количество палочек нужно убрать, чтобы оставшиеся не образовывали ни одного прямоугольника?

8. (*По задаче С. Токарева*) Перед присяжными лежат 40 гирек, на 20 из них написано «10 г», на 20 остальных – «11 г». Присяжным известно лишь то, что каждая гирька весит либо 10 г, либо 11 г, а адвокат знает, что все надписи верные. За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь адвокат может доказать присяжным, что все надписи верны?

9. (*Задача из США*) Музей в виде квадрата 6×6 состоит из 36 залов 1×1. Каждые два зала, соседствующие по стороне, соединены дверью. В каждом зале висит несколько картин. При любой прогулке по 11 залам из левого нижнего угла в правый верхний угол посетитель увидит одно и то же количество картин. Аналогично, при любой прогулке по 11 залам из левого верхнего угла в правый нижний угол посетитель увидит одно и то же количество картин. Могло ли в музее оказаться ровно 1000 картин?

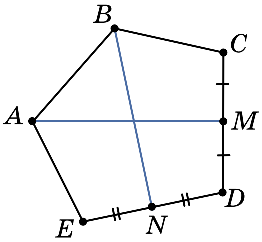
10. (*В. Дольников*) В стране несколько городов, между любыми двумя либо нет дороги, либо есть одна дорога с односторонним движением. Оказалось, что для любых двух городов найдётся третий, из которого можно добраться до каждого из этих двух городов. Король хочет выбрать столицу так, чтобы из неё можно было попасть в любой другой город. Сможет ли он это гарантированно сделать?

11. (*Д. Кузнецов*) Фигура *снежинка* бьёт клетки таким образом, как показано на рисунке. Какое максимальное количество не бьющих друг друга снежинок можно разместить на доске 8×8?



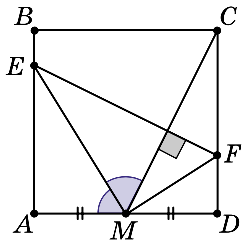
ГЕОМЕТРИЯ ОБЫЧНАЯ И КОМБИНАТОРНАЯ

12. (*Задача из Украины*) Медианой выпуклого пятиугольника $ABCDE$ назовём отрезок, соединяющий вершину с серединой противоположной стороны, то есть вершину A с серединой стороны CD, вершину B с серединой стороны DE и т. д. Известно, что 4 из 5 таких медиан перпендикулярны соответствующим сторонам, к которым проведены. Обязательно ли и пятая медиана перпендикулярна стороне, к которой проведена?



13. (*С. Волчёнков*) Равносторонний треугольник разбит на три треугольника. Докажите, что хотя бы одну из этих трёх частей можно покрыть двумя другими.

14. (*Д. Кузнецов*) На сторонах AB и CD квадрата $ABCD$ взяты такие точки E и F, что отрезки EF и CM перпендикулярны, где M – середина AD. Оказалось, что ME – биссектриса угла AMC. Докажите, что MF – биссектриса угла CMD.



15. (*Задача из США*) Назовём набор точек на плоскости *интересным*, если для любой раскраски этих точек в чёрный и белый цвета (допустимы раскраски, где все точки одного цвета) можно провести две прямые так, что они проходят через все чёрные точки и ни через одну белую. Какое наибольшее количество точек может быть в интересном наборе?

16. (*Л. Емельянов, Д. Кузнецов*) Дан треугольник ABC. Известно, что для любой точки P строго внутри ABC из отрезков PA, PB, PC можно составить треугольник. Докажите, что ABC равносторонний.

17*. (*Задача из Израиля*) Каждая точка плоскости окрашена в один из двух цветов. Для каждого равностороннего треугольника существует равный ему, все вершины которого одного цвета. Докажите, что для каждого треугольника существует равный ему треугольник, все вершины которого одного цвета.

Художник Сергей Чуб