НАШ КОНКУРС, II ТУР
(«Квантик» № 10, 2023)

6. *Вася заметил, что если записать даты рождения в формате ДД.ММ.ГГГГ, то все цифры на соответствующих местах у него и у его двоюродного брата отличаются. Какова наименьшая возможная разница в возрасте между ними?*

Ответ: 2 дня. Так как все цифры года, включая первую, поменялись, один из ребят родился в 1999 г., а другой – в 2000. Разница их возрастов будет меньше месяца, только если старший родился в декабре, а младший – в январе. С разницей в 1 день они родиться не могли (у 31 и 01 совпадает вторая цифра), а с разницей в 2 дня могли: например, 31.12.1999 и 02.01.2000.

7. *Пятнадцать бочек поставили в виде треугольника (рис. 1) и обтянули кольцевым обручем. Шестнадцать бочек поставили в виде квадрата 4×4 (рис. 2) и тоже обтянули кольцевым обручем. Сравните длины этих обручей.*

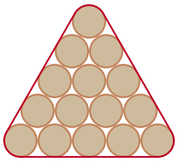


Рис. 1

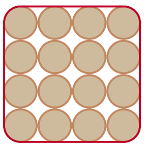
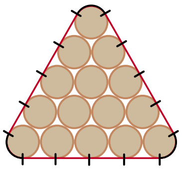
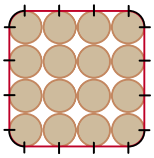


Рис. 2



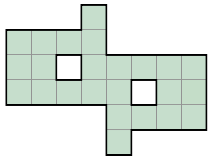


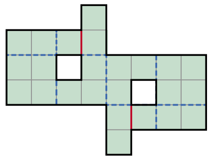
Ответ: они равны. Обруч состоит из частей, плотно прилегающих к угловым бочкам, и частей между точками, где соседние бочки касаются обруча. Части второго вида равны (расстоянию между центрами соседних бочек), и в треугольнике их по 4 на трёх сторонах, а в квадрате по 3 на четырёх сторонах – поровну. Части первого вида, если их соединить, и в случае треугольника, и в случае квадрата образуют кольцо вокруг одной бочки.

8. *Имеются стакан кофе, наполненный на* 2/3, *и такой же стакан молока, наполненный на* 2/3. *Разрешается переливать любое количество жидкости туда и обратно, тщательно её перемешивая, но нельзя ничего выливать. Можно ли получить в одном из стаканов напиток, составленный из молока и кофе в пропорции* 1:1?

Ответ: нельзя. Предположим противное и рассмотрим первый момент, когда в одном из стаканов стало поровну молока и кофе. Так как всего напитков поровну, то и во втором стакане их поровну. Всего молока и кофе 4/3 стакана, поэтому оба стакана не пустые. Но тогда до переливания во втором стакане также было поровну кофе и молока, – раньше первого такого момента!

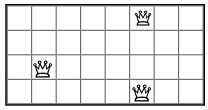
9. *Сделайте на фигуре надрезы так, чтобы полученная фигура не распалась на части и ей можно было обернуть какой-нибудь куб в один слой. (Надрезы нарисуйте сплошными линиями, а сгибы – пунктирными.)*





Ответ: см. рисунок (можно обернуть куб 2×2×2).

10. *На прямоугольнике 4×8 клеток (половине шахматной доски) разместите трёх ферзей так, чтобы каждое пустое поле бил хотя бы один из ферзей. (Ферзь бьёт по горизонтали, вертикали и диагонали на любое число клеток.)*



Ответ: см. рисунок.

НОВАЯ РОМБИЧЕСКАЯ ФЛЕКСОТРУБКА
(«Квантик» № 11, 2023)

См. видео по ссылке kvan.tk/flextube

КАК ВАРИТЬ КАРТОШКУ
(«Квантик» № 11, 2023)

Квантик прав. После того как вода закипела, больше чем до 100° её (а значит, и картошку внутри) не нагреешь. Так что и вариться картошка будет с той же скоростью. А если включить плиту посильнее, дополнительное тепло уйдет просто на более быстрое испарение воды.

Так будет с открытой кастрюлей. В скороварке с плотно закрытой крышкой, включив плиту посильнее, можно добиться повышенного давления, при котором вода кипит при большей температуре – и еда готовится быстрее.

СПРАВЕДЛИВЫЙ ДЕЛЁЖ, ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ТУЭ – МОРСА И СНЕЖИНКА КОХА

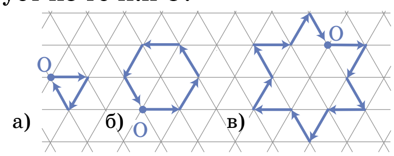
1. Нет. Когда мы последовательно удваиваем фрагменты последовательности Туэ–Морса, то начиная с АБ, получаем либо фрагменты, которые тоже заканчиваются на АБ (это фрагменты длин 2, $8 = 2 \cdot 4$, $32 = 2 \cdot 4^2$ и т. д.), либо фрагменты, которые заканчиваются на БА (это фрагменты длин 4, $16 = 4^2$, $64 = 4^3$ и т. д.), поэтому ни АА, ни ББ не могут стоять в конце фрагмента.

Отсюда следует, что три одинаковых буквы подряд встретиться не могут. В самом деле, если в исходном фрагменте не было трёх идущих подряд одинаковых букв, то и в его «зеркальном варианте» три идущие подряд одинаковые буквы не появятся. Осталось проверить тройки, пересекающие границу склейки между фрагментом и его зеркальным вариантом. Около границы (её мы для наглядности обозначим вертикальной чертой) стоит либо АБ|БА либо БА|БА, то есть снова нет троек из одинаковых букв.

2. Ответ: А. Из построения последовательности Туэ–Морса следует, что фрагменты длин 4, $4^2 = 16$, $4^3 = 64$, $4^4 = 256$, $4^5 = 1024$ и т. д. центрально симметричны относительно середины.

Поэтому буква, которая стоит на 25 месте от конца фрагмента длины $1024 = 4^5$ (то есть на тысячном месте от начала) совпадает с буквой, которая стоит на 25 месте от начала. Чтобы найти эту букву, заметим, что $25 = 16 + 9$, поэтому согласно определению нужно взять букву на 9 месте от начала фрагмента длины 16 (это будет Б) и взять её «зеркальный вариант» (это будет А).

3. Ответы показаны на картинке. Черепашка стартует из точки О.



4. Например, подойдёт программа АББАБААБАББАБААБАББАБААБ.

ФИШЕР, СМЫСЛОВ, ТАЛЬ

Выдумана третья история. Фитиль у свечки выступает с верхнего конца – там, где свечу зажигают, а снизу он спрятан внутри. Перевернув свечку, Таль не смог бы её зажечь.

Истории про Фишера и Смыслова взяты из книги Евгения Гика «Шахматные байки».

XVIII ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТУРНИР. Избранные задачи

1. Ответ: $(342-5)\cdot 6+1$ или $31\cdot 65+2\cdot 4$.

2. Ответ: 45 см. Разбить отрезок длины 45 см на 4 практически дециметровых нельзя – их суммарная длина меньше $4\cdot 11 = 44$ см. А 5 практически дециметровых отрезков слишком много – их суммарная длина больше $5\cdot 9 = 45$ см.

Но на 5 практически дециметровых отрезков можно разбить любой отрезок длиной больше $5\cdot 9 = 45$ см и меньше $5\cdot 11 = 55$ см; на 6 – любой отрезок длиной больше $6\cdot 9 = 54$ см и меньше $6\cdot 11 = 66$ см; и т.д. Мы покрываем последующие длины без пропусков: ведь очередной интервал $(9k,\ 11k)$ пересекается со следующим $(9(k+1),\ 11(k+1))$, так как $9(k+1) < 11k$ при $9 < 2k$, то есть при $k \geqslant 5$.

3. Ответ: 3640. Обозначим третье число в ряду через a. Тогда ряд начинается так: $1, a-1, a, \frac{a+1}{a-1}, \frac{2}{a-1}, 1, \ldots$ Далее числа в ряду повторяются: первая пятёрка чисел такая же, как следующая пятёрка, и т.д. Тогда 2023-е число равно третьему: $2 = a$. Значит, ряд выглядит так: 1, 1, 2, 3, 2, ..., 1, 1, 2, 3, 2, 1, 1, 2. Сумма всех чисел равна $(1+1+2+3+2)\cdot 2020/5+1+1+2$.

4. Заметим, что $0 = a^2+b^2+1-2(ab+a+b) = (a-b+1)^2-4a$, откуда $4a = (a-b+1)^2$. Тогда и само a – квадрат. Аналогично, и b – квадрат.

5. Число делится на 11 тогда и только тогда, когда цифры его записи, стоящие на нечётных позициях, в сумме дают такой же остаток при делении на 11, что и цифры, стоящие на чётных позициях. Тогда, если мысленно удалить в нашем 101-значном числе любые две одинаковые соседние цифры, на делимость на 11 это не повлияет. Будем делать так, пока одинаковые соседи есть. В какой-то момент останется число, в котором цифры 1 и 2 чередуются, а всего их нечётное количество. Цифра, которую надо удалить по-настоящему – средняя цифра этого числа.

6. Ответ: 2 кучки. Одну кучку получить нельзя: последним ходом мы объединили бы две равные кучки, получив чётное число камней.

Покажем, как получить две кучки. Вместо кучек будем иногда называть число камней в них. Сначала объединяем единицы в пары, пока возможно. Затем объединяем в пары двойки, потом – четвёрки, и т. д. Так мы получим различные степени двойки, задающие двоичное разложение числа 2023. Заметим, что любая кучка больше суммы всех меньших.

Далее действуем так. Упорядочим кучки по возрастанию. Берём наименьшую кучу, отнимаем столько же камней у наибольшей и создаём новую кучу. Новая куча не больше следующей из оставшихся. Если появляются равные кучи, объединяем их, пока кучи не станут разными. Далее повторяем этот алгоритм.

Исходная наибольшая кучка остаётся наибольшей, пока куч хотя бы три – она изначально больше предыдущей хотя бы в 2 раза, а вычли из неё суммарно меньше, чем в предыдущей. Остальные кучки будут степенями двойки.

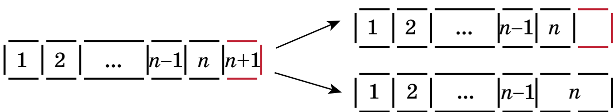
Каждым шагом наименьшая куча удваивается, в какой-то момент она сравняется со следующей по величине и объединится, число куч уменьшится на 1. Алгоритм работает, пока куч хотя бы 3, поэтому когда-то мы получим 2 кучки.

Замечание. Мы показали, как получить не более чем две кучи для любого начального числа кучек (по 1 камню). Ровно одну кучу можно получить в точности тогда, когда исходное число куч равно степени двойки, – попробуйте доказать!

7. Ответ: n. Пусть полоска горизонтальна.

Пример: достаточно убрать все вертикальные палочки, кроме одной.

Оценка: докажем, что необходимо убрать n палочек. Для $n = 1$ это очевидно. Пусть для какого-то n доказали. Возьмём полоску, в которой на 1 клетку больше, и рассмотрим её самую правую клетку. В ней надо что-то убрать. Если это верхняя, нижняя или правая палочки, останется целой полоска из n клеток, из неё надо убрать ещё n палочек. Если же это левая палочка, мы получим полоску, в которой сначала идут $n - 1$ клеток, а потом – прямоугольник 1×2, который можно мысленно сжать, превратив в клетку, и мы получим полоску из n клеток: в ней надо убрать ещё n палочек.



Так мы шаг за шагом докажем утверждение для полоски из любого числа клеток.

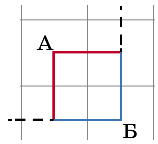
8. Ответ: за 2 взвешивания.

Пример. Положим на левую чашу 11 гирь с надписью «10 г», а на правую – 10 гирь с надписью «11 г». Присяжные понимают, что на первой чаше суммарный вес не меньше $11 \cdot 10$ г, а на второй – не больше $10 \cdot 11$ г. Равенство, которое они видят, возможно только в случае, когда вес обеих чаш равен 110 г, а тогда все надписи на взвешиваемых гирях верны. Вторым взвешиванием кладём на левую чашу 9 оставшихся гирь с надписью «10 г» и две проверенные гири весом 10 г, а на правую – оставшиеся 10 гирь с надписью «11 г». Так мы проверим все 40 гирь.

Оценка. Пусть удалось проверить все 40 гирь за одно взвешивание. Ни на какую из чаш не могут попасть две гири с разными надписями: ведь если поменять их надписи друг с другом, результат взвешивания не изменится, а отличить исходную ситуацию от новой невозможно. Заметим также, что если хоть одна гиря не взвешивается, присяжные не знают, весит она 10 г или 11 г.

Значит, на одной из чаш лежат 20 гирь с надписью «10 г», а на другой – 20 гирь с надписью «11 г». Присяжные видят, что первая чаша легче. Но она будет легче и когда все надписи правдивы, и когда мы поменяем местами любую гирю веса 10 г с любой гирей веса 11 г. Поэтому присяжные ни про одну гирю ничего не узнают.

9. Ответ: нет. Допустим, могло. Рассмотрим любые две клетки А и Б, соседние по диагонали. Найдутся пути, отличающиеся только клетками А и Б (см. рисунок).



Значит, в А и Б поровну картин. Раскрасив клетки в шахматном порядке, получаем, что во всех 18 белых клетках поровну картин и во всех 18 чёрных тоже. Значит, общее число картин делится на 18, но 1000 на 18 не делится!

10. Ответ: сможет. Рассмотрим город C, из которого можно попасть в наибольшее число городов. Пусть в какой-то город A попасть не удалось. Тогда найдётся такой город $Б$, из которого можно попасть и в A, и в C, а значит, и в те города, в которые можно попасть из C. Противоречие – из $Б$ можно попасть в большее число городов, чем из C. Значит, из C можно попасть куда угодно.

11. Ответ: 20 снежинок. Заметим, что каждая снежинка бьёт только клетки того цвета, на котором она стоит. Значит, можно рассматривать две части доски отдельно – белые клетки и чёрные. Начнём с чёрных. Обозначим их разными буквами и цифрами, как на рисунке 1. Изобразим эти же клетки, повернув их, как это показано на рисунке 2. Теперь снежинка бьёт одну клетку и все соседние с ней по вершине.

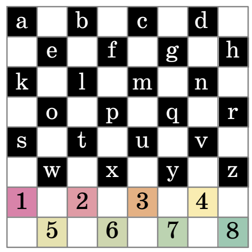


Рис. 1

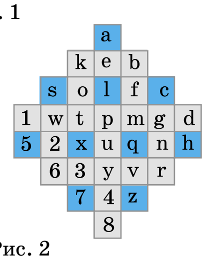


Рис. 2

Пример. На рисунке 2 синим отмечены 10 снежинок, стоящие на чёрных клетках и не бьющие друг друга. Расставим аналогично 10 снежинок на белых клетках, всего будет 20.

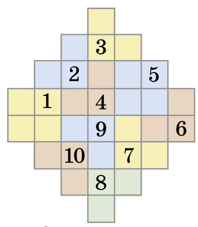
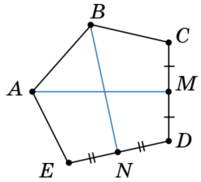


Рис. 3

Оценка. Разобьём новую доску на 10 областей, как показано на рисунке 3. В каждой области может стоять не более одной снежинки. Значит, снежинок на чёрных клетках не более 10. Аналогично, снежинок на белых клетках не более 10.



12. В треугольнике медиана перпендикулярна основанию, если и только если он равнобедренный. Тогда если медиана AM перпендикулярна CD, то диагонали AD и AC равны, если медиана BN перпендикулярна ED, то диагонали BE и BD равны, и т. д. Если условие выполнится для четырёх медиан, все диагонали пятиугольника будут равны, а тогда и последняя медиана будет медианой равнобедренного треугольника!

13. Пусть ABC – исходный треугольник. Если внутри каждой его стороны есть вершина какой-то части, частей будет хотя бы 4 (к углам ABC примыкают разные части, и если к каждому углу – ровно одна, то ещё будет часть внутри). Поэтому одна из сторон треугольника ABC целиком попадёт в одну из частей – пусть это AC.

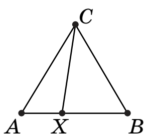


Рис. 1

Если она попала в треугольник разбиения вместе с отрезком AX стороны AB (рис. 1), то CX делит ABC на две половины, одна из которых накрывает другую – нужно выбрать части в соответствии с этим. Иначе каждая сторона у ABC – это сторона треугольника разбиения (рис. 2).

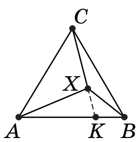
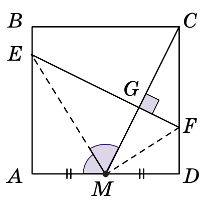


Рис. 2

В этом случае продлим CX до пересечения с AB в точке K. Пусть ACK не меньше BCK. Тогда части ACX и ABX накрывают CXB.



14. Так как ME – биссектриса угла AMG, прямоугольные треугольники AEM и GEM равны по гипотенузе и острому углу. Значит, $AM = GM$. Так как M – середина AD, то $GM = MD$. Прямоугольные треугольники GMF и DMF равны по катету и гипотенузе, откуда $\angle GMF = \angle DMF$.

15. Ответ: 5 точек.

Пример: вершины квадрата и точка пересечения его диагоналей.

Оценка. Докажем, что 6 точек быть не может.

Во-первых, все точки должны лежать на двух прямых (так как они могут быть все чёрные). Во-вторых, на одной прямой не может быть больше 3 точек (иначе 3 из них сделаем чёрными, а остальные белыми – тогда на каждую из этих трёх точек понадобится своя прямая).

Значит, на одной прямой лежат 3 точки, и на другой прямой – 3 другие точки. Покрасим 5 точек в чёрный цвет, а шестую – в белый. Чтобы вычеркнуть чёрные, понадобятся 3 прямые.

16. Пусть у ABC есть неравные стороны – скажем, $AB < BC$. Выберем такое число k, что $AB < k < BC$. Возьмём внутри треугольника точку P, настолько близкую к B, что $PA + PB < k$, а $PC > k$. Тогда для отрезков PA, PB, PC не выполняется неравенство треугольника.

17. Пусть цвета – синий и красный. Треугольник с одноцветными вершинами будем называть *одноцветным*. Надо найти одноцветный треугольник, равный некоторому исходному. Возьмём равносторонний одноцветный треугольник ABC (пусть он синий), сторона которого равна наибольшей стороне исходного, и отметим внутри точку X так, что треугольник AXC равен исходному (рис. 1). Если X синяя, задача решена, пусть X красная.

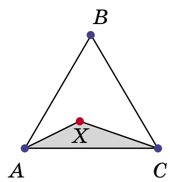


Рис. 1

Повернув AXC на 60° вокруг A против часовой стрелки, получим равный ему треугольник AYB, а повернув AXC на 60° вокруг C по часовой стрелке, получим равный ему треугольник BZC (рис. 2). Если хоть одна из точек Y и Z синяя, задача решена, пусть они красные.

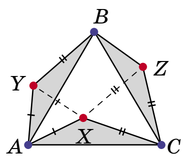


Рис. 2

Заметим, что треугольники AXY и CXZ равносторонние. Повернём треугольник AYB вокруг точки Y против часовой стрелки на 60°, получим равный исходному треугольник XYM. Аналогично, повернём BZC вокруг Z по часовой стрелке на 60°, получим равный исходному треугольник NZX (рис. 3).

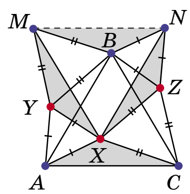


Рис. 3

Если хоть одна из точек M и N красная, задача решена, пусть они синие. Тогда треугольник NBM одноцветный (синий). Но он равен исходному – ведь MYB и NZB равносторонние, откуда $BM = XC$, $BN = XA$, а $\angle MBN = 360^\circ - \angle MBY - \angle YBA - \angle ABC - \angle CBZ - \angle ZBN = 360^\circ - 60^\circ - \angle XCA - 60^\circ - \angle XAC - 60^\circ = \angle AXC$.