ОЦЕНИМ КОЛИЧЕСТВО УЗЛОВ И НЕ ТОЛЬКО

Александр Блинков

Мы решим несколько задач про размещение фигур на клетчатой доске.

Задача 1. Какое наибольшее количество прямоугольников 1×3 клетки можно закрасить на доске 9×9 клеток так, чтобы никакие два прямоугольника не имели общих точек?

Попробуем закрасить как можно больше прямоугольников, располагая их потеснее. Легко закрасить 12 (рис. 1). А почему нельзя больше? Вроде понятно: «зазоров» мы не оставляли, а ещё закрасить можно лишь одну клетку, не противореча условию. Но сомнения всё же остаются: вдруг, расположив прямоугольники по-другому, мы сумеем втиснуть ещё один?

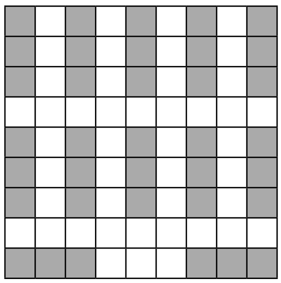


Рис. 1

Существует эффективный способ строго доказать, что больше 12 прямоугольников закрасить не получится. Любую вершину клетки назовём *узлом*. Доска 9×9 содержит $10\times 10 = 100$ узлов (включая узлы на границе). Так как прямоугольники не имеют общих точек, каждый узел используется не более одного раза. Каждый прямоугольник 1×3 содержит 8 узлов. Чтобы закрасить 13 прямоугольников, потребуется $13\cdot 8 = 104$ узла, а их на доске только 100. **Ответ:** 12.

Следующая задача родилась во время игры в «морской бой».

Напомним, что перед началом игры на доске 10×10 клеток расставляют один корабль из четырёх клеток, два – из трёх клеток, три – из двух и четыре одноклеточных (рис. 2). По правилам, корабли не должны касаться друг друга, даже углами.

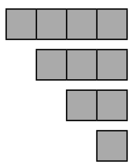


Рис. 2

Задача 2. До какого наименьшего размера можно уменьшить поле для игры в «морской бой», оставив его квадратным и сохранив правило расстановки кораблей?

Решение. Прежде чем строить пример, хорошо бы понять ответ. Для этого имеет смысл как-то оце-

нить возможные размеры поля. Подсчитаем количество узлов, которые в сумме должны занять все корабли: $10 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 60$. Какое же поле взять? Квадрат 6×6 ещё не подойдёт – в нём $7 \cdot 7 = 49$ узлов, не хватает.

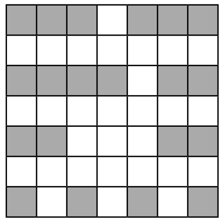


Рис. 3

А квадрат 7×7 уже мог бы подойти – в нём $8 \cdot 8 = 64$ узла. И действительно, пример расстановки приведён на рисунке 3. **Ответ:** до квадрата 7×7.

В этой задаче есть и другой способ оценки. Чтобы доказать, что квадрат 6×6 не подходит, разобьём его на 9 квадратов 2×2 (рис. 4). В каждом таком квадрате может находиться (даже частично) не более одного корабля, но всего кораблей 10. Значит, расставить их не удастся (даже если они все будут одноклеточными!).

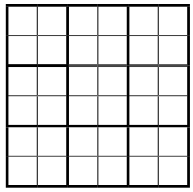


Рис. 4

Кстати, в квадрате 7×7 можно расставить и расширенный комплект с ещё одним одноклеточным кораблём.

Оценка количества узлов применима не только для стандартной клетчатой доски.

Задача 3. Треугольная доска разбита на маленькие равносторонние треугольники со стороной 1 (рис. 5). Можно ли на неё положить по линиям сетки один ромб со стороной 1 и 11 треугольников со стороной 1 так, чтобы они не соприкасались даже углами?

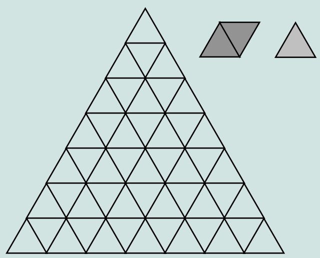


Рис. 5

Решение. На такой доске $1 + 2 + \ldots + 7 + 8 = 36$ узлов сетки. Указанные фигуры занимают $4 + 11 \cdot 3 = 37$ узлов и общих узлов у фигур быть не может, значит, разместить эти фигуры не удастся. **Ответ:** нельзя.

Метод подсчёта узлов не универсален: при решении очень похожей задачи он может не сработать.

Задача 4. Какое наибольшее количество прямоугольников размером 1×3 клетки можно закрасить на доске 10×10 клеток так, чтобы никакие два прямоугольника не имели общих точек?

По сравнению с задачей 1 увеличены размеры доски. Легко закрасить 12 прямоугольников – например, так же, как на рисунке 1, оставив свободными две добавившиеся полосы шириной в одну клетку. А хотя бы 13 никак не получается. Подсчёт узлов этого не объясняет – ведь теперь на доске $11 \cdot 11 = 121$ узел, а каждый прямоугольник содержит по-прежнему 8 узлов, и $121 : 8 > 15$.

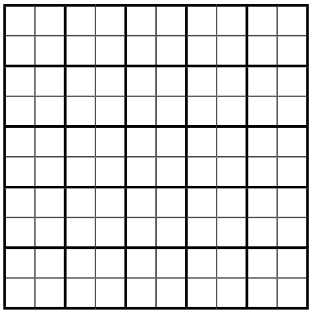


Рис. 6

Попробуем тогда оценить количество прямоугольников аналогично второму способу решения задачи 2. Любой прямоугольник 1×3 занимает какие-то клетки в двух соседних квадратах 2×2. Так как закрашенные прямоугольники не касаются, в этих двух квадратах нет клеток других прямоугольников 1×3. Доска 10×10 разбивается на 25 квадратов 2×2 (рис. 6). Так как $25 : 2 = 12{,}5 < 13$, то больше чем 12 прямоугольников 1×3 расположить на этой доске невозможно. **Ответ:** 12.

О многих методах оценки в «клетчатых» задачах можно прочитать в книжке И. Я. Сиротовского «Клетки и таблицы» (серия «Школьные математические кружки»), недавно вышедшей в издательстве МЦНМО.

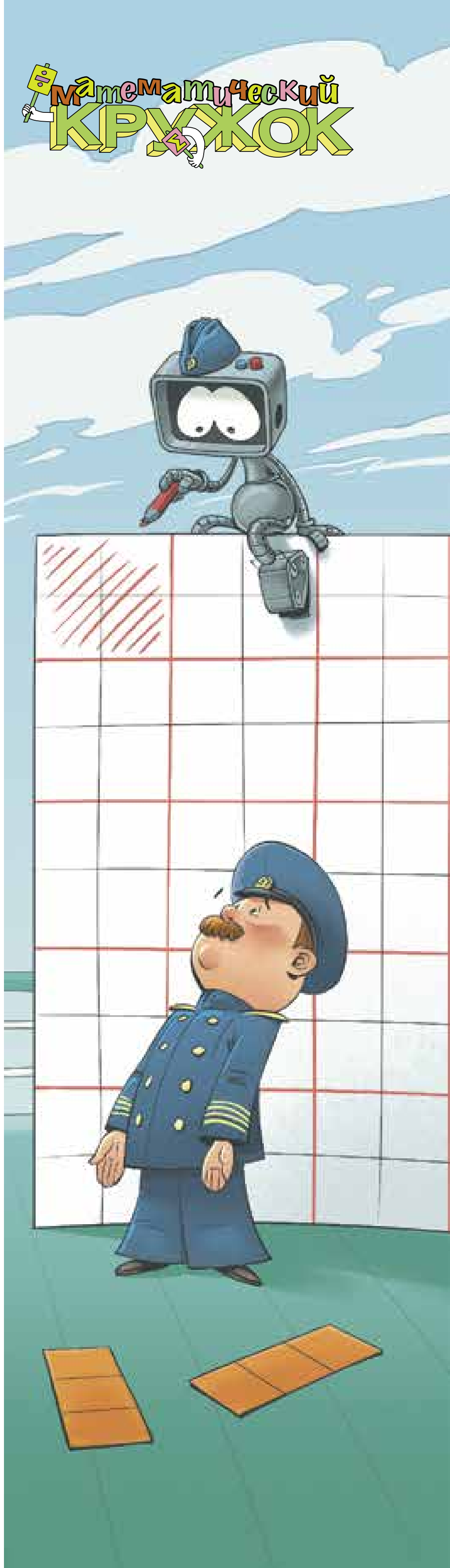
Задачи для самостоятельного решения

Задача 5. Какое наибольшее количество прямоугольников 1×4 можно закрасить на доске 10×10 так, чтобы никакие два прямоугольника не имели общих точек?

Задача 6. На треугольной доске, разбитой на одинаковые равносторонние треугольники со стороной 1, по линиям сетки расположили 7 таких же треугольников и 4 ромба со стороной 1 (рис. 5) так, чтобы они не соприкасались даже углами. Из какого наименьшего количества треугольников могла состоять доска?

Задача 7. Какое наибольшее количество королей можно поставить на клетки шахматной доски 8×8 так, чтобы они не били друг друга? (Король бьёт любую соседнюю клетку по стороне или углу.)

Решения в следующем номере



Художник Мария Усеинова