Егор Бакаев

ТРАНСНЕРАВЕНСТВО, или как разлить мёд по горшочкам

Винни-Пух выпросил у Кролика три горшка мёда.

– Пустые горшочки бери вот с этой полки, а мёд набирай из этих бочонков, – уточнил Кролик.

– Мёд я бы взял трёх разных сортов, так вкуснее.

– Пожалуйста, но тогда вычисляй, какой мёд в какой горшочек набрать.

Винни-Пух крепко задумался.

– И что же тут вычислять?

– Винни, тебе надо определить, какого мёда сколько набрать. Мёд ты ведь по-разному оцениваешь?

– Да, горный мне нравится больше всего, луговой тоже хороший, но и лесного хочу попробовать.

– Тогда давай оценим горный мёд в 5 баллов, луговой – в 4 балла, а лесной – в 3 балла:

$$\textit{горный}\ (5) > \textit{луговой}\ (4) > \textit{лесной}\ (3).$$

– А дальше что?

– Надо найти объёмы горшков, они разные. – Кролик подал Пуху горшки. Ими давно не пользовались.

– А как найти объём?

– Объём (в миллилитрах) был написан на каждом горшочке, но теперь надписи не видны. Придётся, Винни, тебе их почистить и отскрести надписи!

Винни-Пух нехотя принялся очищать горшки.

– Две цифры уже видны. Может, хватит? Уже понятно, какой горшочек самый большой и какой самый маленький:

$$\boxed{1}\boxed{}\boxed{} \quad \boxed{2}\boxed{}\boxed{} \quad \boxed{}\boxed{}.$$

– Нет, для вычислений нужны точные значения!

Наконец все цифры стали известны:

$$\boxed{1}\boxed{9}\boxed{5} \quad \boxed{2}\boxed{0}\boxed{5} \quad \boxed{8}\boxed{0}.$$

Уставший Винни спросил:

– Ну вот. И что теперь надо вычислять?

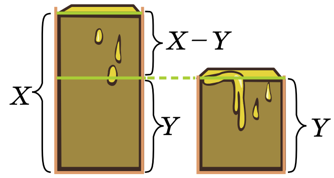
– Допустим, ты захотел налить в первый горшочек пятибалльный мёд, во второй – четырёхбалльный, а в третий – трёхбалльный. Тогда сумма «миллилитробаллов» получится такая... Подожди, сейчас подсчитаем: $5 \cdot 195 + 4 \cdot 205 + 3 \cdot 80 = 2035$. А если в первый горшочек – четырёхбалльный мёд, во второй – пятибалльный, в третий – трёхбалльный, получится $5\cdot 205 + 4\cdot 195 + 3\cdot 80 = 2045$. Так надо перебрать все 6 вариантов. И выбрать вариант с наибольшей суммой.

– Кролик! Да очевидно же, что надо в самый большой горшок положить самый вкусный мёд! В средний горшок – средний, а в самый маленький горшок – тот, который похуже! Зачем же ты мне голову морочил!

– Не знаю, не знаю... – задумчиво протянул Кролик. – А как ты это будешь доказывать? По-моему, проще моим способом всё посчитать.

– Ничего тут не надо считать и доказывать! Ясно, что больше нужно взять того, что лучше, и так далее.

С этим спором друзья пришли к Кристоферу Робину, чтобы тот их рассудил.



– Винни предлагает верный способ, – сказал Кристофер. – Но давайте всё-таки докажем его правильность, благо это нетрудно! Пусть мёд разлит оптимально. Возьмём любые два горшочка: пусть у одного объём X мл, а у другого Y мл, причём $X > Y$. В них налиты разные сорта мёда. Что произойдёт, если поменять сорта мёда между горшочками? Одного мёда станет на $X - Y$ меньше, а другого – на столько же больше. Значит, нужно, чтобы эта разность состояла из того мёда, который больше нравится, для этого он должен быть налит в бóльший горшок (из этих двух). А раз это выполняется для любых двух горшков, то и получается, что чем горшок больше, тем лучший мёд в нём должен быть. И это рассуждение верно для любого количества горшков, не только для трёх!

– Теперь понял, что всё доказано, – согласился Кролик. – А мой способ всё-таки работает или нет?

– Работает, но в нём непонятно, почему можно давать сортам мёда именно такие баллы – 5, 4, 3. А вдруг, если дать баллы 5, 4, 2, результат изменится? И почему вообще то, насколько Пуху нравится сорт мёда, выражается числом? Хватит того, чтобы Винни их упорядочил по тому, насколько они ему нравятся.

– Если заменить баллы 5, 4, 3 на 5, 4, 2, результаты вычислений, конечно, изменятся... Но, видимо, ответ – какой мёд куда наливать – останется прежним...

– Да, и это как раз понятно из рассуждения, которое я вам рассказал. Важно только, как упорядочены сорта мёда и как упорядочены объёмы горшков.

– И в способе Кролика пришлось отчищать горшки, чтобы найти все цифры! – проворчал Винни-Пух. – А в способе Кристофера Робина это не нужно.

– Да! – подтвердил Кристофер. – Давайте применим этот подход в разных задачах. Я их решал когда-то на математическом кружке.

Задача 1. Расставьте в клетках цифры от 0 до 9 по одному разу так, чтобы у этих двух сумм была как можно большая а) сумма; б) разность. Сколькими способами можно это сделать?

$$\square \cdot 1 + \square \cdot 2 + \square \cdot 3 + \square \cdot 4 + \square \cdot 5$$

$$\square \cdot 1 + \square \cdot 2 + \square \cdot 3 + \square \cdot 4 + \square \cdot 5$$

Винни-Пух тут же бросился решать задачу.

– В пункте а) мы эти две суммы складываем. На 5 умножатся две цифры – берём самые большие, 9 и 8, на 4 умножатся тоже две – берём 7 и 6, и так далее.

– И каждый раз у нас два способа, как их поставить: 9 в первую строку, а 8 во вторую, или наоборот. Тогда ответ – это $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$, – подсчитал Кролик.

– Верно! А в пункте б)? – спросил Кристофер Робин.

– Если мы вычтем одну сумму из другой, коэффициенты у 10 чисел получатся такие: 5, 4, 3, 2, 1, –1, –2, –3, –4, –5, – заметил Кролик. – Я вот их как раз по убыванию перечислил, поэтому так и умножаем: 5 на 9, 4 на 8, 3 на 7 и так далее! А способов будет…

– ... ровно один, и ты его назвал, – сказал Винни.

– Да, получается, что один, – согласился Кролик.

Задача 2. Цифры 1, 2, 3, ..., 7 выписаны в некотором порядке (так что получилось семизначное число). Рассмотрим все тройки цифр, идущих подряд, и найдём сумму соответствующих пяти трёхзначных чисел. Каково наибольшее возможное значение этой суммы?

– А здесь что на что умножается? – удивился Винни. – Вроде бы в условии никакого умножения нет.

– Но тут говорится про десятичную запись, – подсказал Кристофер Робин.

– В ней есть умножение! – понял Кролик. – Пусть цифры – это A, B, C, D, E, F, G, тогда мы складываем

$$\boxed{A}\boxed{B}\boxed{C} + \boxed{B}\boxed{C}\boxed{D} + \boxed{C}\boxed{D}\boxed{E} + \boxed{D}\boxed{E}\boxed{F} + \boxed{E}\boxed{F}\boxed{G}.$$

Каждое число можно расписать так:

$$\boxed{A}\boxed{B}\boxed{C} = 100 \cdot \boxed{A} + 10 \cdot \boxed{B} + 1 \cdot \boxed{C}$$

и всё сложить. Осталось посчитать коэффициенты:

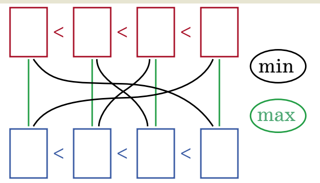
$$100 \cdot \boxed{A} + 110 \cdot \boxed{B} + 111 \cdot \boxed{C} + 111 \cdot \boxed{D} + 111 \cdot \boxed{E} +$$
$$+ 11 \cdot \boxed{F} + 1 \cdot \boxed{G}.$$

– Понятно, теперь надо к бо́льшим числам ставить бо́льшие цифры, тогда и сумма будет наибольшей, – сообразил Винни-Пух. – Осталось подсчитать:

$$100 \cdot \boxed{3} + 110 \cdot \boxed{4} + 111 \cdot \boxed{7} + 111 \cdot \boxed{6} + 111 \cdot \boxed{5} +$$
$$+ 11 \cdot \boxed{2} + 1 \cdot \boxed{1}.$$

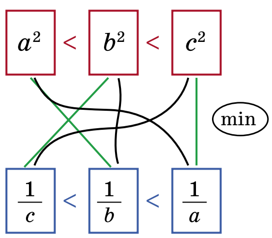
– Верно, – похвалил друзей Кристофер Робин. – Давайте сформулируем наше утверждение в общем виде, «с буквами». Называется оно *транснеравенство*.

Пусть есть набор из n чисел на красных карточках и набор из n чисел на синих. Карточки разбиваются на пары синяя-красная, в каждой паре числа перемножаются, и все эти n произведений складываются. Тогда чтобы сумма была наибольшей, нужно, чтобы красные и синие числа были одинаково упорядочены: если красные идут по возрастанию, то и синие должны идти также по возрастанию. А чтобы сумма была наименьшей, они должны быть упорядочены противоположным образом.



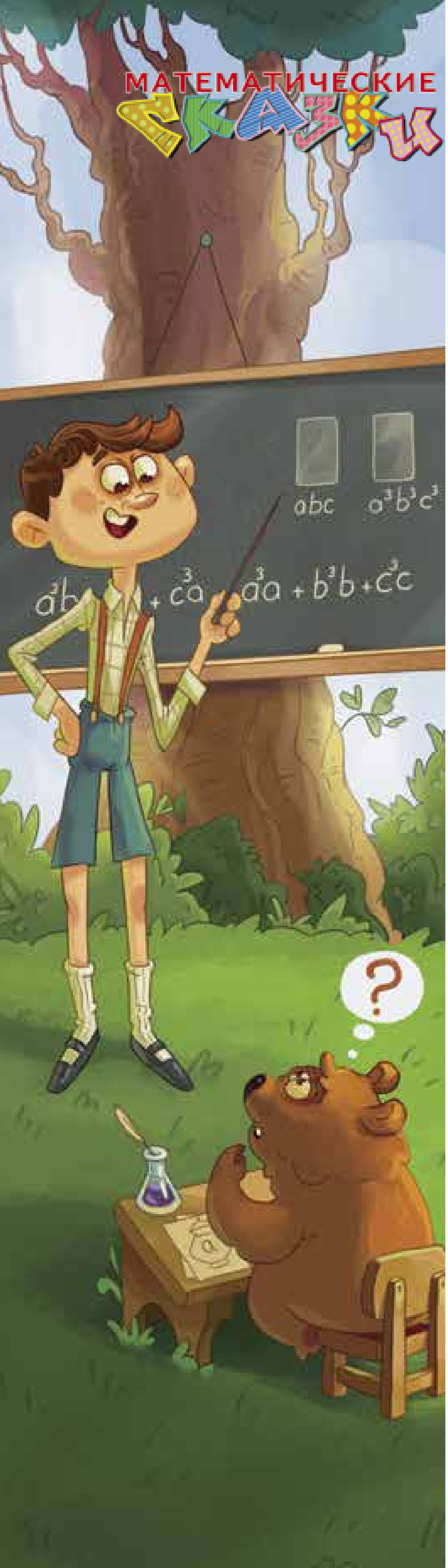
Пример для $n = 4$. Чёрными линиями изображён способ, дающий наименьшую сумму произведений, а зелёными – наибольшую.

– Например, – продолжал Кристофер, – есть различные положительные числа a, b, c, причём $a < b < c$. Тогда $a^2 < b^2 < c^2$ и $\frac{1}{c} < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$. Поставим в пары числа так, чтобы наборы были упорядочены противоположным образом, перемножим числа в парах и сложим (чёрные линии на рисунке):



$$a^2\frac{1}{a} + b^2\frac{1}{b} + c^2\frac{1}{c}.$$

Мы знаем, что если наборы упорядочены противоположным образом, получается минимальная сумма



произведений. Это выражение равно, конечно, $a+b+$ $+c$. Теперь поставим пары в каком-то другом порядке, перемножим и сложим (зелёные линии на рисунке):

$$a^2\frac{1}{b}+b^2\frac{1}{c}+c^2\frac{1}{a}.$$

А значит, мы доказали неравенство:

$$a^2\frac{1}{b}+b^2\frac{1}{c}+c^2\frac{1}{a}>a+b+c.$$

Подобным образом можно доказать много неравенств! Сложность лишь в том, что нам не дано, что написано на карточках, – до этого надо догадаться.

Задача 3. Пусть a, b, c – различные положительные числа. Докажите, что $a^3b+b^3c+c^3a<a^4+b^4+c^4$.

– Четвёртые степени, наверное, получились при перемножении первых и третьих, – сказал Кролик:

$$a^3b+b^3c+c^3a<a^3a+b^3b+c^3c.$$

То есть на красных карточках числа a, b, c, а на синих – a^3, b^3, c^3.

– А мы знаем, как упорядочены эти наборы? – заволновался Винни-Пух.

– Да! Если $a<b<c$, то $a^3<b^3<c^3$. Тогда правое выражение получили, перемножив одинаково упорядоченные наборы, поэтому сумма максимальна, а левое получили, перемножив наборы, упорядоченные по-разному, там сумма меньше. Если числа a, b, c упорядочены по-другому, ситуация аналогична.

– Я понял! Справа наборы упорядочены одинаково. А слева – нет. Поэтому сумма справа больше!

Упражнения для самостоятельного решения

Пусть n – некоторое натуральное число, большее 1. Устно выясните, что больше:

1) $999\cdot888+777\cdot666+555\cdot444$ или $777\cdot888+555\cdot666+999\cdot444$;

2) $7^n\cdot401+5^n\cdot301+9^n\cdot201$ или $7^n\cdot301+9^n\cdot401+5^n\cdot201$;

3) $19^n\cdot\frac{1}{11}+17^n\cdot\frac{1}{12}+15^n\cdot\frac{1}{13}$ или $17^n\cdot\frac{1}{11}+15^n\cdot\frac{1}{12}+19^n\cdot\frac{1}{13}$;

4) $\frac{n^2}{2^n}+\frac{n^3}{3^n}+\frac{n^4}{4^n}$ или $\frac{n^2}{3^n}+\frac{n^3}{4^n}+\frac{n^4}{2^n}$;

5) $\frac{12}{4^n}+\frac{13}{5^n}+\frac{14}{6^n}+\frac{15}{3^n}+\frac{16}{2^n}$ или $\frac{12}{2^n}+\frac{13}{3^n}+\frac{14}{4^n}+\frac{15}{5^n}+\frac{16}{6^n}$.

Более сложные задачи на применение транснеравенства можно найти, например, в статье Л. Пинтера и Й. Хегедыша «Упорядоченные наборы чисел и неравенства», «Квант» № 12 за 1985 год (см. сайт kvant.ras.ru).

Художник Анна Горлач