МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СКАЗКИ

Константин Кохась

ЖИВАЯ ИГРА В 15

– Мне попался совершенно замечательный листик отрывного календаря! – объявил таракан Кузька. – Смотрите, какая тут интересная картинка.

– Игра в 15, – прочёл заголовок дятел Спятел. – Дана коробочка размером 4×4 клетки, на дне которой лежат 16 плиток 1×1. Плитки пронумерованы, одна из плиток (с числом 16) убрана. В результате имеется одна пустая клетка, на которую можно передвинуть любую из соседних плиток. На освободившееся место опять можно передвинуть одну из соседних плиток и т. д. Требуется, передвигая плитки, расположить их в каком-нибудь стандартном порядке.

– Скучно ты читаешь, – сказала Бусенька. – Где задор? Где полёт фантазии? Дай-ка я прочту. – Бусенька взяла листик календаря и стала читать: – Заголовок! Игра в 15! В коробочке размером 4×4 живут 16 плиток 1×1, каждая в своей клеточке.

– Живут? – встрепенулся Кузька.

– Так и написано – «живут»? – поддержал его дятел Спятел.

– Какая разница – так или не так? Букв столько же, зато какой драйв! Не мешайте зажигать. Так, где мы читаем... Ага, живут 16 плиток! Плитки пронумерованы, любые две плитки либо дружат, либо вовсе незнакомы.

– А-а-а-а, они ещё и дружат! – проверещал Кузька. – Мне кажется, кто-то из нас спятил.

– Время от времени две плитки, которые дружат друг с другом и имеют общую сторону, меняются местами, – продолжала Бусенька. – Спрашивается, всегда ли с помощью таких обменов плитки смогут расположиться в каком-нибудь стандартном порядке.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Один из возможных стандартных порядков

– Что значит «всегда ли»? – спросил Кузька. – Разве тут что-то зависит от времени?

– Имеется в виду, – пояснила Бусенька, – что начальное расположение может быть разным, а стандартное – одно, например, как на твоём листике. И нас спрашивают, при любом ли начальном расположении плитки смогут переползти в стандартное.

– Почему это «переползти»? – возразил дятел Спятел. – Может, они при обмене не ползут, а прыгают.

– Пусть они все передружатся, – предложил Кузька, – тогда им ничего не стоит допрыгать до какого угодно порядка!

– Если все друг с другом дружат, это помогает решить столько проблем... – сказала Бусенька. – К сожалению, наша жизнь устроена гораздо хуже.

– А что известно о том, кто с кем дружит? – спросил дятел Спятел.

– Да, в общем-то, ничего не известно. Для каждого варианта дружбы получается своя головоломка.

– Ну тогда пусть, например, они как-нибудь расселись по клеткам и оказалось, что каждая плитка дружит лишь с соседними (по стороне), – предложил Кузька. – Смогут ли они при такой дружбе расположиться в любом порядке?

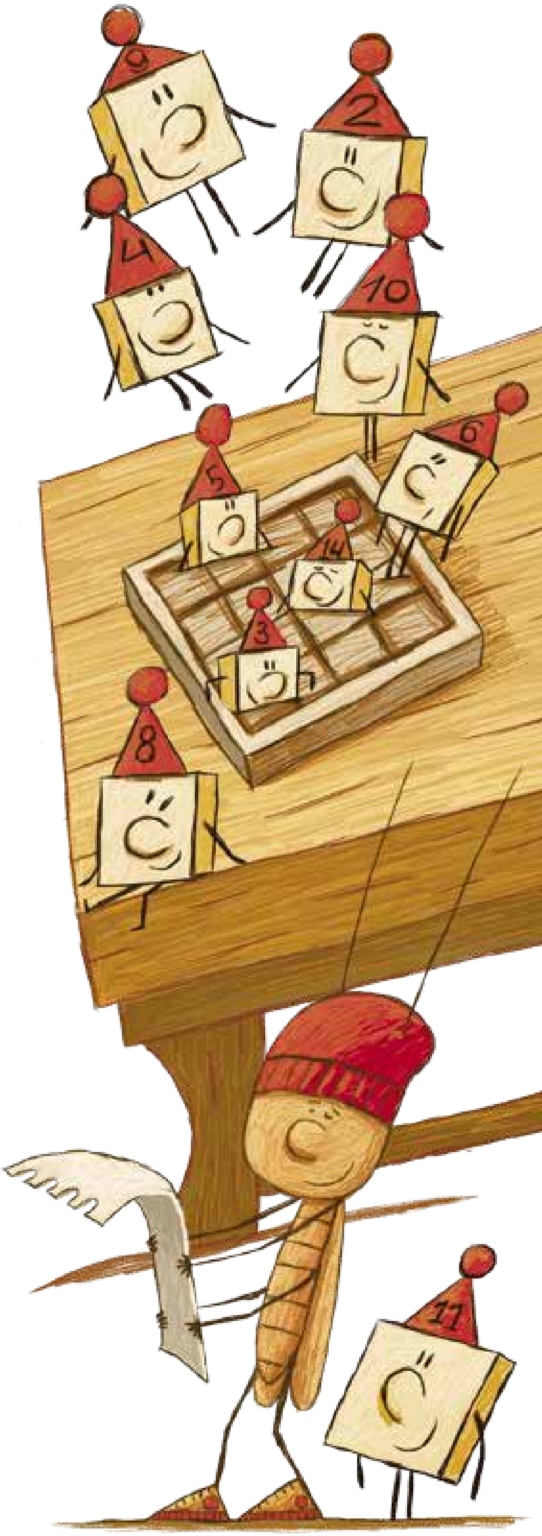
– Нет, – подумав, сказал дятел Спятел. – Можно расставить плиточки так, что никакие два друга не будут соседями. Тогда никакой обмен невозможен.

1	2	3	4
8	7	6	5
9	10	11	12
16	15	14	13

Начальное расположение, в котором дружат только соседи по стороне

1	3	10	12
5	7	14	16
9	11	8	6
13	15	4	2

Здесь плитки, которые на левой картинке были соседями и дружили, теперь живут в несоседних клетках



– Какая неожиданность, – сказал Кузька. – Но ведь это вы говорите про ненастоящую игру в 15. На листике календаря описана другая игра! Я же вижу по картинке – плитка номер 16 вынута!

– Ничего не другая. Просто в «настоящей игре в 15» 16-я плитка дружит со всеми, а больше никто ни с кем не дружит. Получается, что любая плитка может меняться только с 16-й. А чтобы упростить обмены, клетку, где живет 16-я плитка, оставили пустой. Если какая-то из плиток хочет поменяться, она приходит на пустую клетку и занимает её (а свою клетку освобождает) – вот тебе и обмен!

– Это нечестно! – возмутился Кузька. – Ты дружишь со всеми, а тебя даже в свой дом не пускают.

– А настоящая игра в 15 всегда собирается? То есть всегда ли можно получить стандартный порядок? – спросил дятел Спятел.

– Не всегда, – ответила Бусенька. – Но по начальному расположению плиток легко вычислить, соберётся головоломка или нет, – за это отвечают… беспорядки!

– Что-то ты в философию ударилась, – обворчал это заявление дятел Спятел, – голод мешает сытости, сон прогоняет бодрость, беспорядки мешают порядку.

– Точно! Философия! – согласилась Бусенька. – Это именно то, что надо. Требуется повысить уровень абстрактности. Кузька, надень-ка ты свой шлем НШ-19У, на всякий случай. Для начала создадим эстетический задел – покрасим доску 4×4 в шахматном порядке. В этих клетках будут жить плиточки. Но прежде чем заселять доску, заметим, что соседние клетки на ней – всегда разного цвета, однако при этом не любые две клетки разного цвета – соседи.

– Пожалуй, я и впрямь надену шлем, – сказал Кузька и быстренько сгонял за шлемом. – Умеешь ты находить сложности в самых простейших местах.

– Попробуем упростить, – предложила Бусенька, – давайте на этой доске считать соседними клетками любые две клетки разного цвета!

– Выходит, у каждой белой клетки 8 соседних чёрных? – удивился Кузька. – Разве можно так раскрасить доску, чтобы каждая белая соседствовала с восемью чёрными, а каждая чёрная – с восемью белыми?

– А нам больше не нужно ничего раскрашивать. Клетки уже раскрашены, и мы просто договариваемся, что у каждой белой клетки соседями являются все чёрные, а у каждой чёрной – все белые!

– Противоположности притягиваются, – прокомментировал дятел Спятел. – Но я не понял: мы говорим про игру в 15 или про какую-то другую?

– Мы слегка меняем правила игры в 15. Теперь у нас больше соседних клеток, значит, плиточкам легче меняться с 16-й плиткой. Но оказывается, что даже с облегчёнными правилами головоломка иногда не собирается. Сейчас увидите. Мы разобрались с соседством, теперь разместим на доске плиточки. Сами плиточки прозрачные, на них виден только номер, и каждая плитка может жить и в чёрной клетке, и в белой. Поселим их на доску, например, вот так. И будем считать это расположение плиток стандартным.

1	9	2	10
11	3	12	4
5	13	6	14
15	7	16	8

– Какой-то нелепый стандарт, – сказал дятел Спятел, – очень сложный.

– Сейчас упростим! Для этого отбросим всё лишнее. Так как клетки разного цвета мы считаем соседними, нам не обязательно располагать клетки в виде квадратной доски – можно расположить их в линию. Главное помнить, что при обмене меняются местами плитки, живущие в клетках разного цвета!

– Шаманство какое-то, – пробормотал Кузька.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

– А теперь будем считать беспорядки! Расставим плиточки как угодно и положение плиток, в котором плитка с бо́льшим номером лежит левее плитки с меньшим номером, будем называть *беспорядком*.

2	1	3	4	12	6	7	8	9	10	11	5	13	14	15	16

Например, вот здесь плитки 2 и 1 образуют беспорядок. И 12 и 6 образуют беспорядок. И 7 и 5. Давайте подсчитаем суммарное число беспорядков.

– Здесь 13 беспорядков, – доложил Кузька. – Странными делами мы сегодня занимаемся. Наблюдаем за живыми плитками, назначаем дружбу, считаем беспорядки…

– Зато, как говорится в рекламных роликах, – бодро откликнулся дятел Спятел, – ни один таракан при выполнении этих действий не пострадал.

– Проведём эксперимент! – объявила Бусенька. – Поменяем местами любые две плитки, лежащие рядом (независимо от того, дружат они или нет). Скажи мне, Кузька, как изменится число беспорядков?

Кузька задумался. Он пошевелил усами влево, потом вправо, потом опять влево и, наконец, сказал:

– Число беспорядков либо увеличится на 1, либо уменьшится на 1.

– Правильно! Теперь проведём эксперимент посложнее. Если поменять местами любые две плитки (неважно – близко они или далеко, дружат или не дружат), то число беспорядков увеличится или уменьшится на нечётное число! Попросим прокомментировать это наблюдение наших экспертов и менторов!

Эксперты и менторы, в лице дятла Спятла, закатили глаза и стали качаться из стороны в сторону. Потом они выкатили глаза обратно и заявили:

– Проще всего это увидеть на примере. Допустим, мы хотим поменять местами плитки 4 и 5 из предыдущей картинки. Между ними семь других плиток.

2	1	3	4	12	6	7	8	9	10	11	5	13	14	15	16

Поменяем местами плиточки

Сначала подгоним плитку 4 к плитке 5, меняя её каждый раз с соседней справа плиткой. Мы сделаем в результате 7 обменов, и каждый раз, как выяснил Кузька, число беспорядков будет меняться на ±1.

2	1	3	12	6	7	8	9	10	11	4	5	13	14	15	16

Подгоним плитку 4 вправо
к плитке 5

Далее двигаем плитку 5 влево, меняя каждый раз с очередным соседом, пока она не придёт на место, где вначале стояла плитка 4. Потребуется 8 обменов.

2	1	3	5	12	6	7	8	9	10	11	4	13	14	15	16

Передвинули плитку 5 влево
на её новое место

Готово. Плитки 4 и 5 поменялись местами. Мы сделали 7+8 обменов, каждый раз изменяя число беспорядков на ±1. Значит, оно изменилось на нечётное число. Аналогично обстоят дела в общем случае.

– Подведём итог, – сказала Бусенька, – когда мы меняем местами любые две плитки, чётность числа беспорядков меняется на противоположную. Запомним это. И да, ещё будем следить за «адресом» 16-й плитки: если 16-я плитка живёт в чёрной клетке, будем считать, что её адрес равен 0, а если в белой – её адрес равен 1. А теперь – Страшный Секрет игры в 15. Вы ещё помните, как меняются местами плитки? Шестнадцатая плитка дружит со всеми, и значит, она может поменяться местами с любой «соседней». Иными словами, если 16-я плитка живёт в чёрной клетке, она может поменяться местами с любой плиткой, живущей в белой клетке, и наоборот: если 16-я в белой, то она может поменяться с любой чёрной.

– Помним, помним, – сказал дятел Спятел, – секрет давай.

– Страшный Секрет состоит в том, что чётность числа беспорядков либо всегда равна адресу 16-й плитки, либо всегда не равна!

– Как это? – не понял Кузька.

– Ну вот есть у тебя, допустим, такая расстановка:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	15	14	16

Тут один беспорядок, то есть чётность числа беспорядков равна 1. А 16-я плитка живет в чёрной клетке, то есть её адрес равен 0. Чётность не совпадает с адресом! Если мы сделаем один обмен, чётность изменится и станет равна 0. Но при обмене 16-я плитка переедет на белую клетку, её адрес станет равен 1, и чётность опять не совпадёт с адресом!

– Вот ужас! – воскликнул Кузька. – После следующего обмена они снова будут не равны, потом опять не равны... А в стандартном расположении они равны. Значит, мы никогда не достигнем стандартного!

– А если чётность равна адресу – сможем? – усомнился дятел Спятел.

– Сможем. Даже в исходной игре в 15 сможем, а уж в этой линейной чёрно-белой это совсем просто.

Несколько задачек

В задачах описано, какие плитки дружат. Требуется ответить на вопрос: из любого ли начального положения на доске 4×4 плитки смогут перейти в стандартное положение?

1. 16 плиток выложены по кругу, каждая плитка подружилась с двумя соседними.

2. Каждая из 15 плиток дружит с остальными четырнадцатью. А ещё есть 16-я плитка, которая дружит только с 15-й.

3. Есть 5 общительных плиток и 11 необщительных. Каждая необщительная дружит только (со всеми) общительными. Сами общительные между собой не дружат.

Художник Инга Коржнева