НАШ КОНКУРС, IV ТУР
(«Квантик» № 12, 2023)

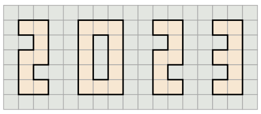
16. *Можно ли записать подряд по возрастанию три последовательных натуральных числа и поставить между ними два знака арифметических действий так, чтобы итог равнялся 2023, если а) оба раза разрешается использовать любой знак; б) надо использовать один знак сложения и один знак умножения?*

Ответ: да. а) Например, $2022 - 2023 + 2024$ или $45 \cdot 46 - 47$; б) $43 + 44 \cdot 45$.

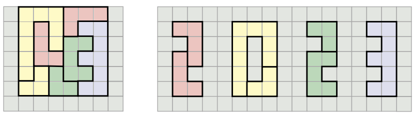
17. *У Пети была кубическая коробка и много кусочков сахара размером $1 \times 2 \times 2$. Он смог поместить весь сахар в коробку в несколько слоёв, располагая кусочки параллельно сторонам коробки гранью 2×2 вниз. Потом он решил переложить все кусочки в такую же коробку, располагая их параллельно сторонам коробки гранью 1×2 вниз, но задумался – точно ли это возможно? Помогите Пете ответить на вопрос.*

Ответ: возможно. Пусть Петя, поместив кусочки сахара гранью 2×2 вниз, поставит коробку вместе с ними боковой гранью вниз. Получится такая же кубическая коробка, внутри которой все кусочки сахара лежат гранью 1×2 вниз.

18. *Разрежьте квадрат 6×6 на семь частей и сложите из них изображённую на рисунке фигуру в виде числа 2023.*



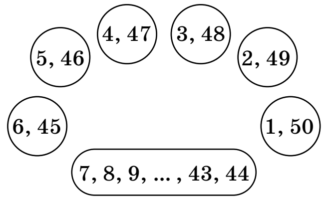
Ответ: см. рисунок.



19. *По кругу стоят 7 диванов, на них сидит всего 50 человек, на каждом диване – хотя бы один человек. Каждый сказал: «На следующем по часовой стрелке диване ровно половина людей выше меня ростом, а ровно половина – ниже». Какое наибольшее число людей могло сказать правду?*

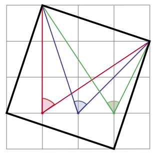
Ответ: 48. Самый высокий человек точно соврал (выше него никого нет), и, аналогично, соврал самый низкий. Значит, больше 48 человек сказать правду не могли.

Приведём пример, когда сказали правду 48 человек. Возьмём 50 человек разного роста и пронумеруем их числами от 1 до 50 по возрастанию роста. Посадим на один из диванов людей с номерами 1 и 50, а дальше на каждый предыдущий по часовой стрелке диван будем сажать поровну самых высоких и самых низких из оставшихся (например, как на рисунке).

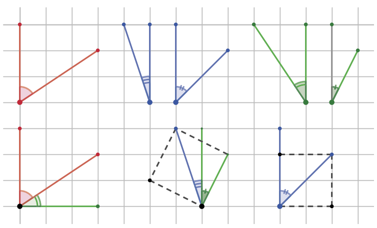


Тогда для всех, кроме 1-го и 50-го, ровно половина людей на следующем диване будет ниже, и ровно половина – выше.

20. *Внутри квадрата со стороной, равной диагонали прямоугольника 1×3 клеточки, отметили три угла – красный, синий и зелёный, – как показано на рисунке. Чему равна их сумма?*

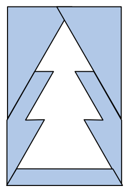


Ответ: 180°. Разделим синий и зелёный углы на части вертикальными линиями сетки и переложим части, как на рисунке.



Красный угол и левая часть зелёного вместе дадут прямой угол; левая часть синего угла вместе с правой частью зелёного, как и правая часть синего угла, образуют углы между сторонами и диагоналями пунктирных квадратов и поэтому равны по 45°. Значит, сумма отмеченных углов равна $90° + 45° + 45° = 180°$.

НОВОГОДНЯЯ ГОЛОВОЛОМКА – 2024
(«Квантик» № 1, 2024)



СКОЛЬКО БУДЕТ СОВПАДЕНИЙ?
(«Квантик» № 1, 2024)

Марь-Иванна права: восьми точек совпадения (включая два найденных нуля) не наберётся. Но для этого придётся кое-что подсчитать, рассмотрев подряд все 6 оставшихся пар. Итак:

Пара «Цельсий – Фаренгейт». Выражение температуры по Фаренгейту через температуру по Цельсию нам известно: $T_F = 32 + 1{,}8T_c$. И если в какой-то точке их числовые значения одинаковы (и равны просто T), то можно записать:

$$T = 32 + 1{,}8T,$$

откуда $T = -40$. При этой температуре показания по Цельсию и Фаренгейту совпадут.

Пара «Цельсий – Ранкин». Аналогично,

$$T = 491{,}67 + 1{,}8T,$$

откуда $T = -614{,}59$. А такой температуры ни по Цельсию, ни по Ранкину не бывает, она ниже абсолютного нуля. Совпадение невозможно!

Пара «Фаренгейт – Ньютон». У нас нет формулы, выражающей «прямую связь» между этими шкалами. Но есть выражения их обеих через температуру по Цельсию! Приравниваем:

$$32 + 1{,}8T = 0{,}33T,$$

откуда $T = -21{,}77$. Но это – температура в градусах *Цельсия*! А по Фаренгейту и Ньютону она равна $32 + 1{,}8 \cdot (-21{,}77) = -0{,}33 \cdot 21{,}77 = = -7{,}18$ градусов в обеих шкалах.

Пара «Фаренгейт – Кельвин». Аналогично,

$$32 + 1{,}8T = 273{,}15 + T,$$

откуда $T = 301{,}43$ (по Цельсию!). Ещё одно совпадение. По Фаренгейту и Кельвину будет $32 + 1{,}8 \cdot 301{,}43 = 273{,}15 + 301{,}43 = 574{,}58$.

Пара «Ньютон – Кельвин». Имеем:

$$0{,}33T = 273{,}15 + T,$$

откуда $T = -407{,}69$ (опять же по Цельсию). Снова недостижимая температура.

Пара «Ньютон – Ранкин». Здесь:

$$0{,}33T = 491{,}67 + 1{,}8T,$$

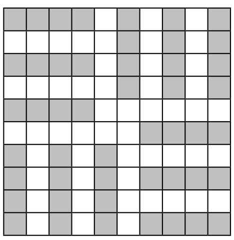
откуда $T = -334{,}47$ (по Цельсию). И тут мимо.

Итак, из шести гипотетических совпадений реальны три. Всего совпадений (с учётом двух ранее найденных нулей) получается пять.

НА ВХОД И НА ВЫХОД
(«Квантик» № 1, 2024)

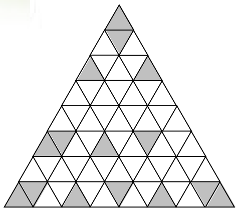
В условии сказано, что код надо набирать и по пути туда, и по пути обратно – видимо, с внутренней стороны калитки есть точно такой же замок с клавиатурой. Маша просунула руку сквозь прутья калитки и набрала код с обратной стороны. Кстати, это реальная история, произошедшая с автором задачи.

ОЦЕНИМ КОЛИЧЕСТВО УЗЛОВ И НЕ ТОЛЬКО **(«Квантик» № 1, 2024)**

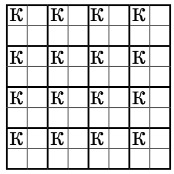


5. Ответ: 12. *Пример.* См. рисунок справа. *Оценка.* Клетчатая доска 10×10 содержит 121 узел. Каждый узел может быть закрашен не более одного раза. Каждый прямоугольник 1×4 содержит 10 узлов. Чтобы закрасить 13 прямоугольников, потребовалось бы $13 \cdot 10 = 130$ узлов – больше, чем имеется.

Сравните с ответом в задаче 4.



6. Ответ: из 64 треугольников. *Пример.* См. рисунок справа. *Оценка.* Уберём из доски один ряд треугольников. $1 + 2 + \ldots + 7 + 8 = 36$ узлов сетки. Так как общих узлов у фигур быть не может, указанные фигуры занимают $3 \cdot 7 + 4 \cdot 4 = = 37$ узлов сетки. Значит, такой доски не хватит.



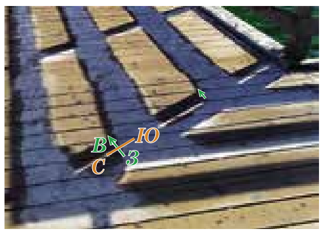
7. Ответ: 16. *Пример.* См. рисунок справа. *Оценка.* Разобьём доску на 16 квадратов 2×2. В каждом таком квадрате можно расположить не более одного короля.

Отметим, что подсчёт числа узлов не даёт нужной оценки, так как их на доске 81, а каждый король занимает одну клетку, то есть 4 узла.

ИНЕЙ И ТЕНЬ **(«Квантик» № 1, 2024)**

1. В течение дня солнце движется по небу – движутся и тени. Там, откуда тень только что ушла, образуется белая полоска из не успевшего растаять инея, а место, где тень только что появилась, ещё не успело покрыться инеем и поэтому остаётся тёмным.

2. В обоих полушариях солнце в течение дня двигается с востока на запад, значит, тень от неподвижного объекта будет описывать дугу по направлению с запада на восток. Для наблюдателя в Северном полушарии солнце идёт с востока на запад через юг («по часовой стрелке»), а для наблюдателя в Южном полушарии – через север («против часовой стрелки»).



Иней показывает, где недавно была тень. На фотографии видно, что тень крутится по часовой стрелке, значит, полушарие Северное.

СТРАННАЯ ЛЕСТНИЦА
(«Квантик» № 1, 2024)

Такая конструкция (её называют «гусиный шаг») позволяет сэкономить место за счёт более крутого наклона (см. рисунок). Если обычную лестницу сделать очень крутой, то ступеньки придётся делать либо очень узкие, либо сильно нависающие друг над другом. В любом случае спускаться по ней лицом вперёд будет неудобно или даже невозможно.

ВИСОКОСНЫЙ ГОД И ЗВЁЗДНЫЕ СУТКИ

1. Примерно за один год (365 раз по 4 минуты – это чуть больше 24 часов), а вовсе не за 4.

2. Годом хотелось бы называть время, за которое Земля делает один оборот вокруг Солнца («астрономический год»), сутками – время, за которое Земля делает один оборот вокруг своей оси. Но нет никакой причины для того, чтобы год состоял из целого числа дней – и действительно, астрономический год состоит примерно из $365\frac{1}{4}$ дней. Если эту разницу игнорировать и объявить календарным годом период ровно из 365 дней, даты времён года будут постепенно смещаться.

Добавление одного дня раз в 4 года в основном решает эту проблему, но не до конца, так как астрономический год немного короче $365\frac{1}{4}$ дней – поэтому сейчас мы пользуемся ещё более точным календарём (по этому поводу см. статью «День рождения по новому стилю» в «Квантике» № 9 за 2023 год).

3. Выше было сказано, что сутки – это время оборота Земли вокруг своей оси, но это не вполне точно. Обычные сутки – это *солнечные сутки*, то есть время, за которое при наблюдении с Земли Солнце делает круг. Или, другими словами, время, за которое Земля снова поворачивается к *Солнцу* той же стороной.

Из-за того, что Земля вращается вокруг Солнца, за солнечные сутки Земля делает чуть больше одного оборота – а именно, за год набирается разница ровно в один оборот (чтобы разобраться в этом, полезно решить задачу: монету обкатывают вокруг такой же неподвижной монеты — сколько оборотов она сделает к моменту возвращения в исходную точку?). То есть солнечные сутки примерно на 1/365 длиннее звёздных суток, времени одного оборота Земли вокруг своей оси. Разобравшись с этим, попробуйте решить задачу «День или ночь?» в «Квантике» №8 за 2022 год.

КАПЛИ НА СТЕКЛЕ

Когда поверхность запотевает, капли на ней растут и, дорастая до соседей, сливаются с ними. Если границы капли не слишком легко двигаются по поверхности (поверхность не идеально гладкая, не идеально чистая), получившаяся после объединения большая капля не превратится в круг, а так и останется «кляксой» – оболочкой «родительских» капель.

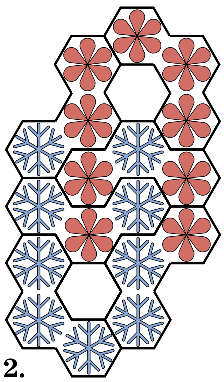
ЖИВАЯ ИГРА В 15

1. Ответ: нет. В положении на правом рисунке на с. 19 плитки не могут сделать ни одного обмена.

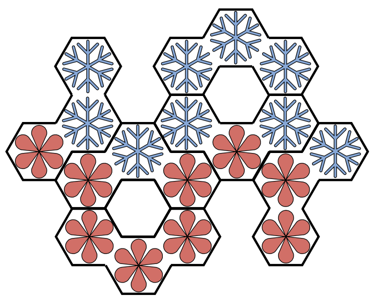
2. Ответ: да. В игре в 15 мы можем любую плиточку передвинуть за несколько ходов на любую из клеток. В условиях задачи 15-я плитка дружит со всеми, и поэтому она аналогична «пустышке» из обычной игры в 15. Пользуясь 15-й клеткой как пустышкой, передвинем 16-ю клетку в угол (на 16-ю клетку доски). После этого остальные плитки легко расставляются по своим местам, так как все они дружат друг с другом.

3. Ответ: нет. Раскрасим клетки в чёрный и белый цвет как во второй половине сказки. Пусть общительные плитки – это плитки 12, 13, 14, 15, 16. Адресом общительных плиток назовем чётность количества общительных плиток, живущих в чёрных клетках. Тогда здесь тоже работает фокус из сказки: расположения плиток, где чётность числа беспорядков не равна адресу общительных плиток, не приводятся к стандартному расположению.

ЗМЕЙКИ ИЗ ШЕСТИ УГОЛКОВ



2.



3.

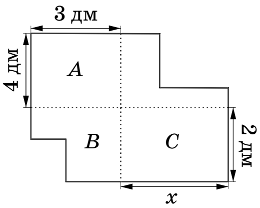
ПАРЛАМЕНТ СОВ

Прайд (pride, то есть «гордость») львов.

XC САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ.

Избранные задачи I тура

1. Ответ: 6 дм. Обозначим через A, B, C «четвертинки» фигуры, показанные на рисунке, а заодно и их площади. Тогда части A и B составляют вместе половину площади фигуры, и части B и C тоже составляют половину площади фигуры. Значит, $A + B = B + C$. Тогда $A = C$. Выражая площади этих прямоугольных частей через стороны, получаем уравнение $3 \cdot 4 = 2x$, откуда $x = 6$.



2. Ответ: да. Например,

$$2154 + 154 + 14 + 1 = 2323.$$

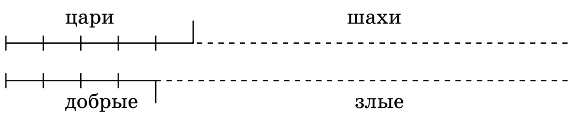
3. Ответ: шахов было в два раза больше. Заметим, что каждый правитель за день съездил и «туда», и «обратно». Если в каждом монарховозе из Ю в Я количество царей было на четверть больше числа добрых правителей, то и

суммарное количество всех царей на четверть больше числа добрых правителей. (1)

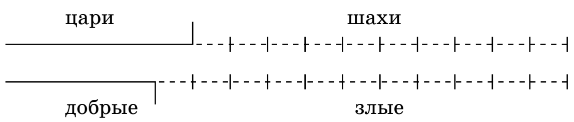
Аналогично

суммарное количество злых правителей на одну десятую больше числа шахов. (2)

Расставим всех правителей в ряд слева направо – сначала царей, потом шахов, на стыке поставим столбик. Теперь переставим правителей: слева поставим добрых, справа злых, а столбик передвинем на новый стык. Судя по условию (1), столбик пришлось передвинуть влево на число мест, равное 1/5 от числа царей.



Судя по условию (2), столбик сдвинулся на 1/10 от числа шахов.



Значит, шахов было в 2 раза больше.

4. Ответ: 112 клеток. Заметим, что пересечение любых двух полос разных направлений – это ромбик из двух клеток. Поэтому на пересечении полос первого и второго направления лежит $2 \cdot 5 \cdot 6 = 60$ клеток, при этом 34 из них покрашено в три цвета, а остальные 26 в два – эти клетки лежат в закрашенных полосах первого и второго направления, но не лежат в закрашенных полосах третьего направления. Аналогично на пересечении полос второго и третьего направления лежит $2 \cdot 6 \cdot 7 = 84$ клетки, 34 из которых покрашено в три цвета, а остальные 50 в два. И наконец, на пересечении полос первого и третьего направления лежит $2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$ клеток, 34 из которых покрашено в три цвета, а остальные 36 в два. Итого ровно по два раза покрашено $26 + 50 + 36 = 112$ клеток.

5. Ответ: у 20 детей. Переформулируем задачу: у всех детей было по три разных шарика, и они два раза одновременно передавали шарики налево. Сколько «монохромных» детей могло получиться?

Заметим, что два соседних ребёнка A и $Б$ не могут оказаться монохромными. Действительно, пусть у левого ребёнка A вначале были шарики первого, второго и третьего цвета, а в конце – шарики первого цвета. Тогда он отдал налево шарики второго и третьего цвета и дважды получил от $Б$ шарик первого цвета, то есть он получил от $Б$ шарик первого цвета, который был у $Б$ с самого начала, а также ещё один шарик первого цвета, который $Б$ получил от своего правого соседа. Но тогда у $Б$ остались шарики второго и третьего цвета, которые были у него с самого начала.

Пример, в котором получаются 20 монохромных детей, строится несложно, если не загружать в свой мозг одновременно все детали. Пусть у всех детей вначале были шарики первого, второго и третьего цвета. Пусть дети с номерами, делящимися на 4, собирают три шарика первого цвета (и передают налево сначала шарик второго цвета, а потом третьего), а остальные дети с чётными номерами пусть собирают три шарика второго цвета (и передают налево сначала шарик первого цвета, а потом третьего). Дети с нечётными номерами будут передавать соседу сначала шарик того цвета, который тот собирает, а потом ещё раз такой же шарик (который ему передали на первом ходу).

6. Ответ: 500 000. Разобьём числа от 1 до 999 998 на 499 999 пар с суммой 999 999. Если (a, b) – любая такая пара, $a + b = 999\,999$, то нетрудно сообразить, что сумма остатков a и b при делении на 125 равна 124 (то есть остатку числа 999 999 при делении на 125). Аналогично сумма остатков a и b при делении на 80 равна 79 (то есть остатку числа 999 999 при делении на 80). Тогда в каждой паре (a, b) сумма всех четырёх остатков равна $124 + 79 = 203$, поэтому ровно одно из чисел a и b крупноостаточное. Итого мы нашли 499 999 крупноостаточных чисел. Ещё есть крупноостаточное число 999 999 и не крупноостаточное число 1 000 000.