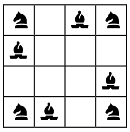
НАШ КОНКУРС, VI тур («Квантик» № 2, 2024)

26. *Расставьте на шахматной доске 4×4 четырёх коней и четырёх слонов так, чтобы эти восемь фигур не били друг друга (фигуры бьют друг друга вне зависимости от цвета).*

Ответ: см. рисунок.



27. *Гонщик Петя тренируется на кольцевой трассе, длина которой – целое число километров. Он едет 1 км, минуту стоит, едет ещё 2 км, минуту стоит, едет ещё 3 км, минуту стоит, и так далее, пока остановка не совпадёт с начальной точкой, и тогда заканчивает тренировку.*

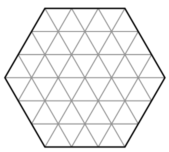
а) Может ли случиться, что Петя не сможет закончить тренировку?

б) Вася тренируется по аналогичной схеме на более короткой кольцевой трассе, длина которой – тоже целое число километров. Могло ли случиться, что они ехали с одинаковой скоростью, но у Пети ушло меньше времени на тренировку, чем у Васи?

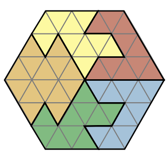
а) Ответ: нет. После n-го заезда Петя проедет $1+2+\ldots+n=n(n+1)/2$ км. Если длина трассы m км, то после $2m$ заездов Петя проедет $(2m)\times\times(2m+1)/2=m(2m+1)$ км. Это число делится на m, поэтому не позже этого момента Петя вернётся в исходную точку и закончит тренировку.

б) Ответ: могло. Пусть Петя катается по трассе длиной 3 км, а Вася – по трассе длиной 2 км. Тогда Петя закончит тренировку, проехав 1 км и ещё 2 км. Вася же, проехав 1 км, окажется в середине своей трассы, проехав ещё 2 км, окажется снова в середине и вернётся в начальную точку только проехав ещё 3 км.

28. *Разрежьте шестиугольник на рисунке по линиям сетки на 5 частей одинакового периметра (части могут быть разной формы).*



Ответ: см. пример на рисунке (у всех частей периметр равен 12).



29. *Индийский школьник Радж закрасил центральную часть таблицы умножения от 1×1 до 19×19 так, как показано на рисунке, и перемножил числа в закрашенных клетках. А Квантик выписал на доску по разу числа 1 и 19, по 3 раза – числа 2 и 18, по 5 раз – числа 3 и 17, по 7 раз – числа 4 и 16, и так далее, по 17 раз – числа 9 и 11, а число 10 выписал 19 раз, после чего все числа на доске перемножил и возвёл результат в квадрат. У кого получилось большее число – у Раджа или у Квантика?*

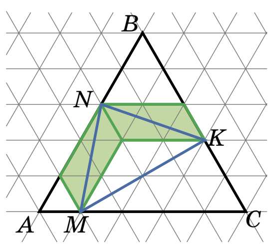
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54	57
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	72	76
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102	108	114
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105	112	119	126	133
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120	128	136	144	152
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135	144	153	162	171
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	143	154	165	176	187	198	209
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	156	168	180	192	204	216	228
13	26	39	52	65	78	91	104	117	130	143	156	169	182	195	208	221	234	247
14	28	42	56	70	84	98	112	126	140	154	168	182	196	210	224	238	252	266
15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180	195	210	225	240	255	270	285
16	32	48	64	80	96	112	128	144	160	176	192	208	224	240	256	272	288	304
17	34	51	68	85	102	119	136	153	170	187	204	221	238	255	272	289	306	323
18	36	54	72	90	108	126	144	162	180	198	216	234	252	270	288	306	324	342
19	38	57	76	95	114	133	152	171	190	209	228	247	266	285	304	323	342	361

Ответ: у них получились одинаковые числа. Если для каждого закрашенного числа выписать его номер строки и все эти номера перемножить, как раз получится число, которое Квантик возводил в квадрат. И оно же получится, если выписать не номера строк, а номера столбцов. Поэтому, умножив это произведение само на себя, Квантик получает произведение всех закрашенных чисел – ведь каждое число в таблице умножения получается как произведение номера его строки и номера его столбца.

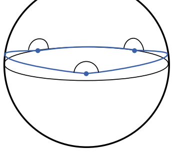
30. *В равностороннем треугольнике ABC отметили точки N, K, M на сторонах AB, BC, AC соответственно так, что $AM=1$, $BN=2$, $BK=3$, $CM=4$. Докажите, что треугольник MNK равнобедренный.*

Поскольку $AM+MC=5$, стороны треугольника ABC равны 5. Нарисуем чертёж на сетке из правильных треугольников со стороной 1.

Заметим, что NM и NK являются бо́льшими диагоналями в одинаковых параллелограммах со сторонами 1 и 2 и острым углом 60° (на рисунке закрашены зелёным). Значит, $MN=NK$, и треугольник MNK – равнобедренный.



КОРОЛЕВСТВО КРИВЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ («Квантик» № 3, 2024)



1. Три кусочка «прямых» (геодезических) делят сферу на две части. Если считать треугольником только меньшую из этих двух частей, наибольшая сумма углов будет у самого большого треугольника, все вершины которого лежат на одном большом круге: $3 \cdot 180°$. Точнее, чтобы получился всё-таки треугольник, а не вырожденный случай (все точки на одной прямой), надо чуть-чуть сдвинуть в сторону одну из трёх вершин. Углы при этом почти не изменятся. То есть $540°$ – это верхняя граница всех возможных сумм.

А если считать треугольником любую часть сферы, ограниченную тремя дугами больших кругов, то, нарисовав на сфере очень маленький треугольничек с суммой почти ровно $180°$, мы одновременно рисуем и очень большой (почти вся сфера с треугольной дырочкой). Сумма углов маленького и «дополнительного» к нему большого треугольников равна $360° \cdot 3$, значит, сумма углов большого равна $360° \cdot 3 - 180° = 900°$.

2. Если опять разрезать конус вдоль образующей, проходящей через одну из вершин треугольника, так, чтобы она раздвоилась, развёрткой этого треугольника будет четырёхугольник. Сумма его углов всегда $360°$, так как четырёхугольник «складывается» из двух треугольников.

3. У треугольников, не включающих вершину, сумма углов $180°$. У треугольников, включающих вершину, сумма углов $3 \cdot 180° - \alpha = 540° - \alpha$: при разрезании по образующей, проходящей через вершину, получается пятиугольник, сумма его углов всегда $540°$; четыре из них в сумме дают сумму углов нашего треугольника, а пятый и есть α. Заметим, что при приближении α к $360°$ конус всё больше похож на плоскость.

4. Для «обычных» треугольников, не «опоясывающих» цилиндр, сумма углов равна $180°$. А если соединить геодезическими 3 точки так, чтобы «опоясать» весь цилиндр, – у таких «треугольников» сумма углов $180° \cdot 3 = 540°$, причём всё равно, со стороны какого основания смотреть.

СКРЫТЫЕ СКОБКИ («Квантик» № 3, 2024)

Обозначение – черта над выражением. Например, ван Схоутен в XVII веке писал

$$B \text{ in } \overline{D \text{ quad.} + B \text{ in } D}$$

там, где мы написали бы $B(D^2 + BD)$. Когда мы сейчас пишем $\sqrt{a+b}$, мы, не задумываясь над этим, фактически пользуемся теми же обозначениями: аргумент для символа квадратного корня «$\sqrt{}$» выделяется не при помощи скобок (как мы бы сделали, например, возводя $a+b$ в квадрат), а при помощи горизонтальной черты.

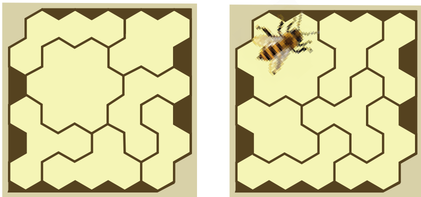
ГДЕ РАСТУТ ПОДШТУКИ? («Квантик» № 3, 2024)

1. На эти предметы удобно класть и ставить ноги, локти, головы, но поднос, конечно, связан с *подносить*, а не *носами*.

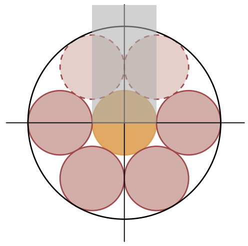
2. Близость пододеяльника к подбородку помогает спать в тепле, но ещё они связаны историческими процессами. Раньше пододеяльники не обволакивали одеяла со всех сторон, а напоминали простыни и пришивались под одеяло. Так и с подбородком: далеко не у каждого человека он спрятан под бородой, особенно в наши дни.

3. Подарочный.

БАШКИРСКИЙ МЁД («Квантик» № 3, 2024)



КОТЛЕТНАЯ ЗАДАЧА («Квантик» № 3, 2024)



Если наша котлета лежит точно в центре сковороды, вокруг неё можно уложить ещё 6 таких же котлет, как на рисунке справа (см. статью С. Дориченко «Об укладке блинов, котлет и апельсинов» в «Квантике» № 4 за 2020 год).

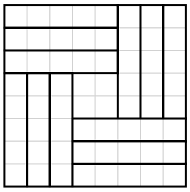
В этом случае, если убрать две верхние котлеты, центральную можно будет двигать вверх внутри показанной на рисунке вертикальной полосы (боковые стороны полосы – это как раз касательные к левой и правой котлетам, а нижние две котлеты наша тем более не задевает).

Если же наша котлета лежит не точно в центре, то она смещена вдоль какого-то радиуса сковороды – можно считать, что вертикально вверх. Добавим 4 из 6 котлет, как на первом рисунке – все, кроме двух верхних. Как мы уже выяснили, они не помешают нашей котлете.

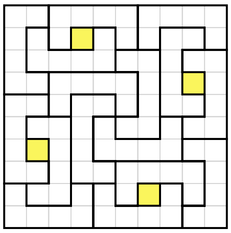
О «МЕТОДЕ ПРОПЕЛЛЕРА»

Многие примеры в этих задачах можно придумать, используя «метод пропеллера».

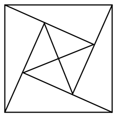
1. Ответ: 12. *Пример* см. на рисунке. *Оценка.* Каждый прямоугольник занимает 5 своих клеток из 64 имеющихся, значит, будет не более [64 : 5] = 12 прямоугольников.



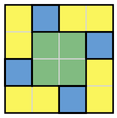
2.



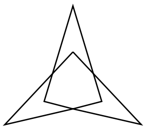
3.



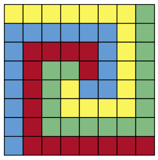
4.



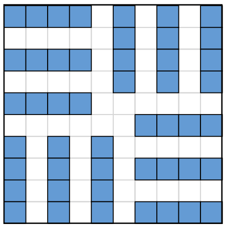
5.



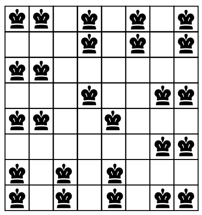
6.



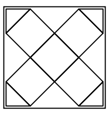
7. Ответ: 12. *Пример* см. на рисунке. *Оценка.* Каждый корабль занимает 10 своих узлов (точки на пересечении линий сетки), всего узлов на доске $11 \cdot 11 = 121$, значит, будет не более [121 : 10] = 12 кораблей.



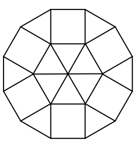
8. Ответ: 26. *Пример* см. на рисунке. *Оценка.* Два короля могут бить друг друга, соприкасаясь по стороне или по углу. На доске $9 \times 9 = 81$ узел (точки на пересечении линий сетки). На соприкасающихся углом королей требуется 7 узлов, а на соприкасающихся стороной – 6 узлов. Каждая пара королей не может иметь общих узлов с другими парами, так как тогда хотя бы один король бил бы уже двух королей. Значит, на доску можно поставить не более [81/6] = 13 пар королей.



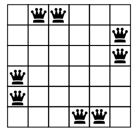
9. Ответ: да, см. рисунок. Эту фигуру можно вырезать даже из квадрата с меньшей, чем 3, стороной ($2\sqrt{2}$).



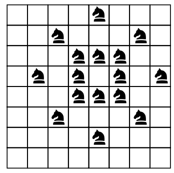
10. Ответ: 12-угольник. *Пример* см. на рисунке. *Оценка.* Углы нашего выпуклого n-угольника могут равняться 60°, 90°, 120° = 60° + 60° и 150° = 60° + 90°. Значит, внешний угол при каждой вершине не меньше 180° – 150° = 30°. Сумма всех внешних углов многоугольника равна 360°. Значит, у нашего n-угольника не более 360°/30° = 12 сторон, причём такое может быть, если у нас все углы равны 150°. Получить такой многоугольник можно так: взять правильный шестиугольник, разбитый на правильные треугольники, на каждой стороне шестиугольника надстроить квадрат, а между соседними квадратами вставить треугольники.



11. Ответ: 8. *Пример* см. на рисунке. *Оценка.* Ферзи разбиваются на пары бьющих друг друга. Каждая пара находится хотя бы в трёх различных рядах (строках и столбцах) из 12 возможных, причём в этих рядах больше нет других ферзей. Тогда всего не более 12 : 3 = 4 пар, а ферзей не более 8.



12. Ответ: $N=4$. *Пример* см. на рисунке. *Оценка.* Конь из самой верхней горизонтали, где есть кони, бьёт максимум 4 коней.



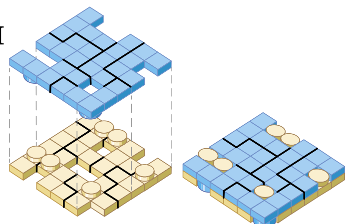
■ ВЕДЬМИНА ЗАДАЧА

1. Клуб, краб, сруб, сор, гул, лес, рог, плот.

2. Лук, галка, руно, бур, брак, дар, нутро, вера, крот.

■ ПЕНТА-КНОПКИ

См. рисунок.



■ ПРОТИВОХОДНЫЕ БУЛЬКИ

В случае кастрюли вода ударяет по дну, и мы слышим его колебания (если опора, на которой стоит кастрюля, их не глушит). Упругость дна постоянна, но масса, которую она качает, увеличивается наливаемой водой, колебания замедляются, звук понижается. В случае бутылки есть другой хороший резонатор: воздух, «запираемый» узким горлышком. Подув на горлышко можно услышать, что чем меньше воздуха в бутылке, тем выше тон такого «свистка». Тут масса колеблющейся «воздушной пробки» в горлышке не меняется, а звук повышается из-за того, что чем меньше «воздушная подушка» внутри бутылки, тем она жёстче и тем быстрее колеблется пружинящая на ней «воздушная пробка».

■ КОРОБКА-ТРАНСФОРМЕР