

## В поисках отрицательной кривизны

А можно ли сделать кривизну отрицательной, то есть сумму углов треугольника меньше  $180^\circ$ ? Это должно быть что-то вогнутое... Может, взять внутреннюю сторону сферы? Такое несложно найти – внутренность чашки, например, или можно мячик разрезать для такого случая. Но только ничего не получится нового! Ведь треугольник на внутренней поверхности сферы будет выглядеть ровно так же, как и на внешней, и углы будут те же: представьте себе, что мячик прозрачный. Снаружи и изнутри и длины сторон, и углы – одинаковы. Так что опять получится больше  $180^\circ$ .

Нет. Нужно, чтобы поверхность была не вогнутой, а выпукло-вогнутой! То есть в одном направлении выпуклой, в другом вогнутой. Как будто, скажем, взяли квадрат из мягкой резины, и два противоположных края потянули вверх, а два других – вниз. Как седло на рисунке 11. Или как перевал-перемычка между двумя горами. Или как телебашня Шухова на Шаболовке в Москве – по-научному это называется «однополостный гиперболоид» (см. рисунок 12 и «Квантик» № 8 за 2012 год). Фигура вращения, которая получается, если закрутить гиперболу  $y = 1/x$  вокруг вертикальной оси, тоже подойдёт...



Рис. 11



Рис. 12

Но как это проверить? Треугольнички на всех этих штуках вроде выглядят довольно «худенькими», не то что «пузатые» треугольники на сфере... Но как подсчитать сумму их углов? Никакую развёртку тут не сделаешь, честно считать – очень сложно, мы такой математики не знаем... Что же остаётся? Эксперимент!

Нужно найти у себя дома что-то такое выпукло-вогнутое. И чем «изогнутее», тем лучше. Например,





ваза для цветов – если она слегка похожа на башню Шухова. Подходят некоторые бутылки – у которых горлышко плавно переходит в «основную часть» или есть явно выделенная «талиа» с гладким переходом. И некоторые лампочки... Но особенно удачным объектом исследования мне показалась медицинская спринцовка. Они продаются в аптеках (хотя и не во всех) и стоят обычно недорого. Только лучше – не маленькая, а побольше, миллилитров 200–300. Летом их ещё можно использовать в качестве брызгалок. Достоинство их в том, что не страшно уронить, а ещё – на них очень удобно рисовать обычной ручкой.

Итак: берём узкую бумажную полоску с ровным краем. Берём спринцовку (или бутылку, или что-нибудь ещё подходящее). Прикладывая полоску к спринцовке, смотрим, какие получаются геодезические; обводя край полоски ручкой, рисуем треугольник – желательно на самой «вогнутой» части. Далее надо измерить углы, но в вогнутость транспортир не влезает. Поэтому прикладываем к нашему треугольнику что-нибудь прозрачное, например кусочек прозрачного файла или обложки для тетради. И обводим на нём каждый угол по отдельности. Обводим очень аккуратно, но только короткие кусочки геодезических рядом с углами. Не пытайтесь перенести на вашу кальку весь треугольник целиком, он же



неплоский, неизбежно возникнут искажения. Важно точно срисовать каждый угол. Затем переносим эти углы на лист бумаги и теперь уже удлинняем концы, чтобы измерить транспортиром. Треугольник получается маленький, но и кривизна в этом месте заметная, поэтому отклонение от «плоского» треугольника вполне значимое. Моему не хватает целых 33°!

Ура, вот она – отрицательная кривизна!

Конечно, на нашей спринцовке кривизна хоть и отрицательна, но совсем не постоянна. И даже не везде отрицательна – только на «перегибе», а дальше переходит в положительную – в кусок обычной сферы. Чтобы сделать поверхность постоянной отрицательной кривизны (по аналогии со сферой – поверхностью постоянной положительной кривизны), надо было бы взять много-много таких спринцовок, вырезать из них маленькие кусочки с одинаковой кривизной и аккуратно, гладко склеить их между собой, как кусочки мозаики. При этом могут получаться разные вещи – например, поверхность Бельтрами (рис. 13); проблема в том, что недоделанная поверхность начинает «упираться сама в себя» и не получается сделать её симметричной и без краёв. В нашем «плоском» трёхмерном пространстве такая поверхность целиком не помещается. Вот был бы у нас шестимерный мир...

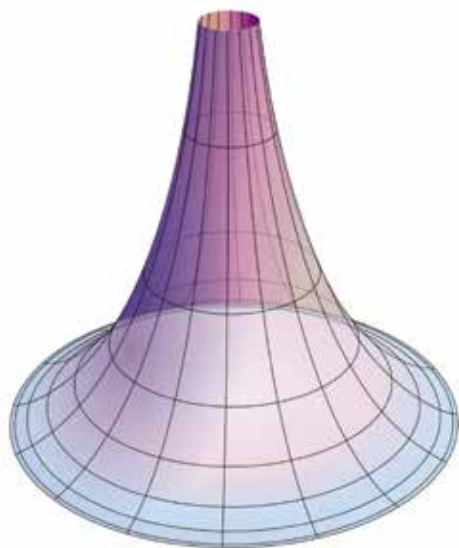


Рис. 13

А какие ещё вещи отрицательной кривизны найдутся у вас дома?

Фото автора



Художник Алексей Вайнер