Алексей Заславский

Удивительное число 2024

Для начала разберём задачу, предлагавшуюся в «Нашем конкурсе» в «Квантике» №4 за 2024 год:

Задача 1. Что больше:

$1\cdot 22+2\cdot 21+3\cdot 20+\ldots+22\cdot 1$

или

$2^2+4^2+6^2+\ldots+22^2$?

Ответ: обе суммы равны.

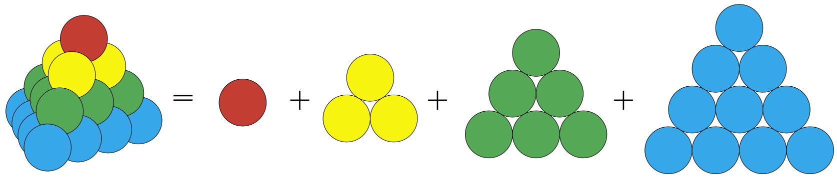
Конечно, не так уж трудно просто посчитать эти суммы (интересно, что обе они равны 2024). Однако убедиться в их равенстве можно, вообще не производя вычислений. В первой сумме первое слагаемое – это 22 единицы, второе – 21 двойка, третье – 20 троек и так далее, поэтому её можно переписать в виде $1+(1+2)+(1+2+3)+(1+2+3+4)+\ldots+(1+2+\ldots+22)$, – ведь тут тоже 22 единицы, 21 двойка, и т.д.

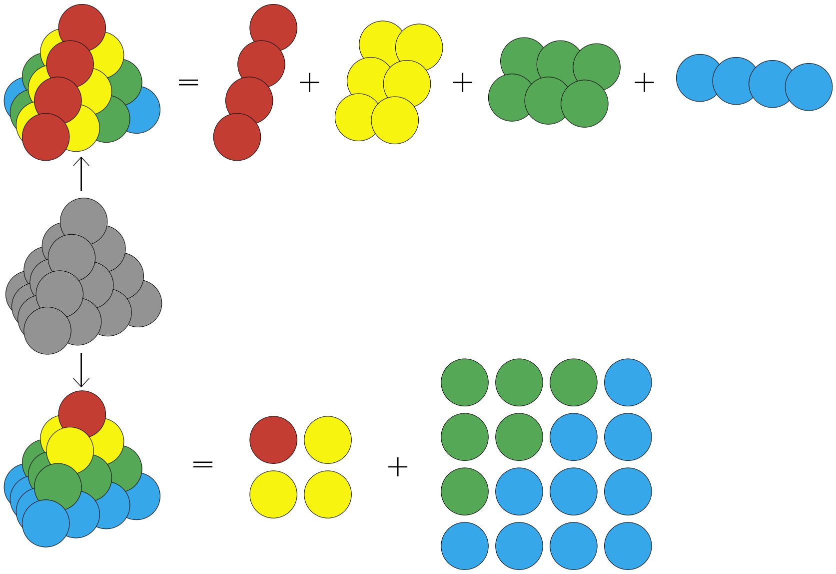
Заметим, что теперь сумма первого и **второго** слагаемых равна $\mathbf{2}+(\mathbf{1}+1)=2\cdot 2=2^2$, третьего и **четвёртого** – равна $\mathbf{4}+(\mathbf{3}+1)+(\mathbf{2}+2)+(\mathbf{1}+3)=4\cdot 4=4^2$... Так будет и дальше; например, 5-е и 6-е слагаемое можно сложить так:

$$\begin{array}{r} 1+2+3+4+5 \\ +\quad 6+5+4+3+2+1 \\ \hline =6+6+6+6+6+6=6\cdot 6=6^2. \end{array}$$

Поэтому вся сумма равна сумме квадратов чётных чисел $2^2+4^2+6^2+\ldots+22^2$, что и требовалось.

Этому рассуждению можно придать геометрическую форму. Составим из одинаковых шариков пирамиду, в верхнем слое которой – один шарик, в следующем – треугольник из $1+2=3$ шариков, в третьем – треугольник из $1+2+3=6$ шариков, ..., в нижнем – треугольник из $1+2+\ldots+22$ шариков.





Тогда первая сумма в задаче 1 соответствует разрезанию этой пирамиды на прямоугольники, а вторая – на слои толщиной 2.

Если из N шариков можно сложить пирамиду, то число N называется *тетраэдральным* (от слова *тетраэдр*, то есть четырёхгранник или треугольная пирамида). Первые четыре тетраэдральных числа равны 1, 4, 10, 20. Как мы выяснили, суммы из первой задачи равны двадцать второму тетраэдральному числу.

Упражнение 1. Напишите равенство, аналогичное равенству из задачи 1, соответствующее произвольному тетраэдральному числу с чётным номером.

Упражнение 2. Какое равенство соответствует тетраэдральному числу с нечётным номером?

А как подсчитать 22-е тетраэдральное число? Можно ли это сделать проще, чем сложив все слагаемые суммы? Для этого рассмотрим другую задачу.

Задача 2. В классе 24 школьника. Из них надо выбрать троих для участия в олимпиаде. Сколькими способами это можно сделать?

Количество способов, которыми можно выбрать k человек из n, называется *числом сочетаний из* n по k и обозначается C_n^k или $\binom{n}{k}$. Известна формула для числа сочетаний:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ – произведение всех чисел от единицы до n (читается *n факториал*).

Докажем эту формулу. Будем расставлять n человек в ряд. Всего таких расстановок $n!$ – на первое место можно поставить любого из n человек, на второе – любого из оставшихся $n-1$ человек и так далее. Первых k человек в такой расстановке мы и будем считать выбранными.

Но среди наших расстановок много таких, когда на первых местах стоят одни и те же k человек. Ведь этих k человек можно переставить на первых k местах $k!$ способами, и оставшихся $n-k$ человек можно переставить на оставшихся местах $(n-k)!$ способами. Выходит, каждый выбор определённых k человек мы учли среди наших $n!$ перестановок $k! \cdot (n-k)!$ раз. Поэтому всего различных выборов k человек будет как раз $\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$, что и требовалось доказать.

Но задачу 2 можно решать и иначе. Построим всех школьников класса в шеренгу. Сначала выберем одного школьника, стоящего не с краю, а затем одного из стоящих слева от выбранного и одного из стоящих справа. Если первый выбранный школьник стоит на втором слева месте, то двух других можно выбрать $1 \cdot 22$ способами, если на третьем слева – $2 \cdot 23$ способами, ..., на втором справа – $22 \cdot 1$ способами. Сложив все эти произведения, получим, что ответом к задаче 2 тоже будет 22-е тетраэдральное число. Значит, оно равно $\binom{24}{3} = \frac{24!}{3! \cdot 21!} = \frac{24 \cdot 23 \cdot 22}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 2024.$

Упражнение 3. Докажите, что n-е тетраэдральное число равно $\binom{n+2}{3}$.

Задача 3. Итак, мы выяснили, что $2024 = \binom{24}{3}$, то есть четырёхзначное число 2024 можно записать, использовав только три цифры – двойку, тройку и четвёрку (правда, понадобится ещё пара скобок или буква C). А можно ли обойтись двумя цифрами?

Художник Анна Рацкевич