XLV ТУРНИР ГОРОДОВ
ВЕСЕННИЙ ТУР, 8 – 9 КЛАССЫ

25 февраля и 10 марта 2024 года прошёл весенний тур XLV Турнира городов – международного математического соревнования для школьников. Приводим задачи для 8 – 9 классов. В скобках после номера задачи указано число баллов, присуждавшихся за её полное решение. При подведении итогов у каждого участника учитываются три задачи, по которым он набрал больше всего баллов.

Базовый вариант

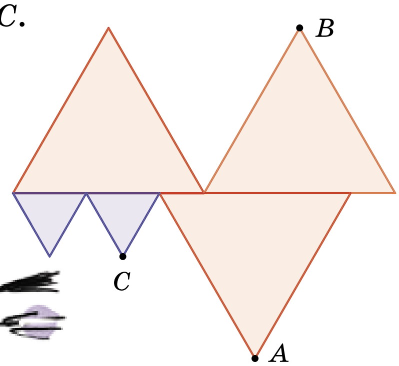
1 [4]. Если Вася делит пирог или кусок пирога на две части, то всегда делает их равными по массе. А если делит на большее число частей, то может сделать их какими угодно, но обязательно все разной массы. За несколько таких дележей Вася разрезал пирог на 17 частей. Могли ли все части оказаться равными по массе? (Объединять части нельзя.)

Борис Френкин

2 [4]. Шахматную доску 8×8 перекрасили в несколько цветов (каждую клетку – в один цвет). Оказалось, что если две клетки – соседние по диагонали или отстоят друг от друга на ход коня, то они обязательно разного цвета. Какое наименьшее число цветов могло быть использовано?

Михаил Евдокимов

3 [5]. Пять равносторонних треугольников расположены так, как показано на рисунке ниже. Три больших треугольника равны между собой и два маленьких тоже равны между собой. Найдите углы треугольника ABC.



Егор Бакаев

4 [5]. Два пирата делят 25 золотых монет разного достоинства, выложенные в виде квадрата 5×5. Пираты по очереди берут по одной монете с краю (монету можно взять, если слева, или справа, или снизу, или сверху от неё нет другой). Верно ли, что первый пират всегда может действовать так, чтобы гарантированно получить хотя бы половину суммарной добычи?

Михаил Евдокимов

5 [6]. Есть N удавов, их пасти имеют размеры 1 см, 2 см, ..., N см. Каждый удав может заглотить яблоко любого диаметра (в см), не превосходящего размер его пасти. Но по внешнему виду нельзя определить, какая у кого пасть. Вечером смотритель может выдать каждому удаву сколько хочет яблок каких хочет размеров, и за ночь удав заглотит все те из них, что влезают ему в пасть. Какое минимальное количество яблок суммарно смотритель должен вечером выдать удавам, чтобы утром по результату он гарантированно определил размер пасти каждого удава?

Татьяна Казицына

Сложный вариант

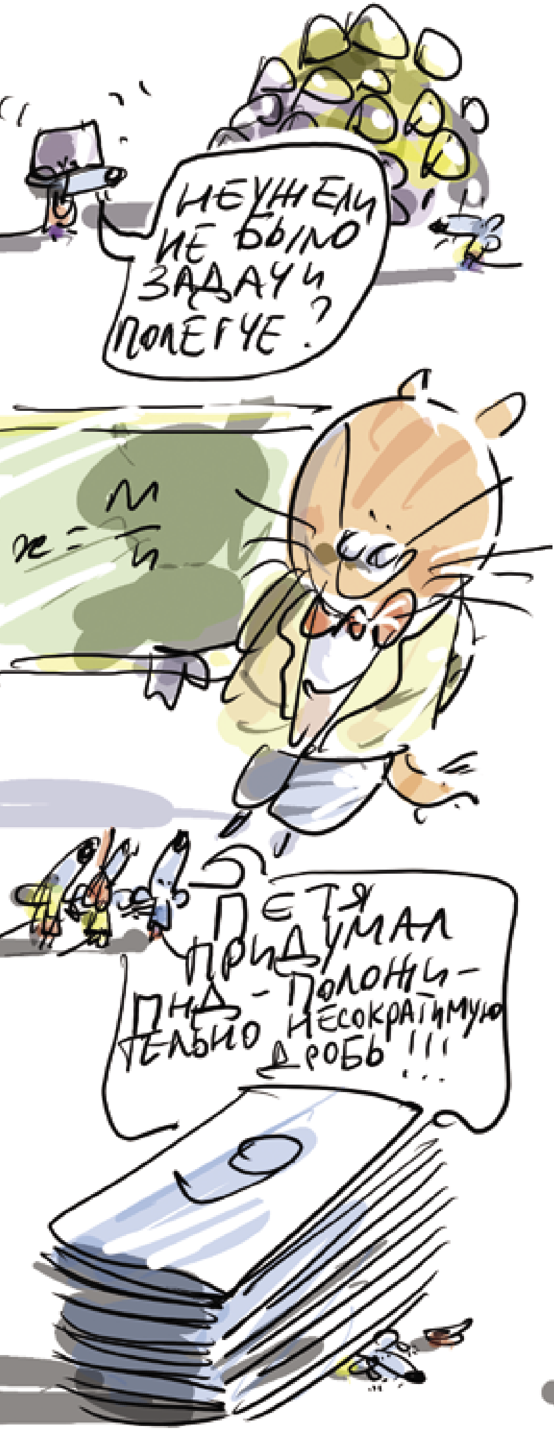
1 [4]. На урок физкультуры пришло 12 детей, все разной силы. Физрук 10 раз делил их на две команды по 6 человек, каждый раз новым способом, и проводил состязание по перетягиванию каната. Могло ли оказаться, что все 10 раз состязание закончилось вничью (то есть суммы сил детей в командах были равны)?

Михаил Евдокимов

2 [5]. Докажите, что среди вершин любого выпуклого девятиугольника можно найти три, образующие тупоугольный треугольник, ни одна сторона которого не совпадает со сторонами девятиугольника.

Александр Юран

XLV ТУРНИР ГОРОДОВ
ВЕСЕННИЙ ТУР, 8–9 КЛАССЫ



3 [7]. Имеется кучка из 100 камней. Играют двое. Первый берёт 1 камень, потом второй берёт 1 или 2 камня, потом первый берёт 1, 2 или 3 камня, затем второй 1, 2, 3 или 4 камня и так далее. Выигрывает взявший последний камень. Кто может обеспечить себе победу, как бы ни играл его соперник?

Людмила Смирнова

4 [7]. Петя загадал положительную несократимую дробь $x = \frac{m}{n}$. Можно назвать положительную дробь y, меньшую 1, и Петя назовёт числитель несократимой дроби, равной сумме $x + y$. Как за два таких действия гарантированно узнать x?

Максим Дидин

5 [9]. См. задачу на с. 27.

6 [7]. На описанной окружности треугольника ABC отметили точки M и N – середины дуг BAC и CBA соответственно, а также точки P и Q – середины дуг BC и AC соответственно. Окружность ω_1 касается стороны BC в точке A_1 и продолжений сторон AC и AB. Окружность ω_2 касается стороны AC в точке B_1 и продолжений сторон BA и BC. Оказалось, что A_1 лежит на отрезке NP. Докажите, что B_1 лежит на отрезке MQ.

Алексей Доледенок

7 [12]. На каждой из 99 карточек написано действительное число. Все 99 чисел различны, а их общая сумма иррациональна. Стопка из 99 карточек называется *неудачной*, если для каждого k от 1 до 99 сумма чисел на k верхних карточках иррациональна. Петя вычислил, сколькими способами можно сложить исходные карточки в неудачную стопку. Какое наименьшее значение он мог получить?

Андрей Кушнир

Художник Сергей Чуб