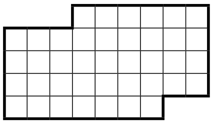
НАШ КОНКУРС, VIII тур

(«Квантик» № 4, 2024)

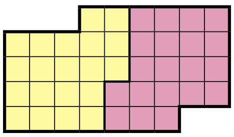
36. *Каждый год 1 апреля мистер Х находит сумму цифр своего возраста. В 2024 году эта сумма оказалась в целое число раз больше, чем будет в 2025 году. Сколько лет может быть мистеру Х, если ему больше 1 года, но меньше 100 лет? Укажите все варианты и докажите, что других нет.*

Ответ: 9, 19, 39, 79, 99. Если при увеличении возраста на 1 не произошло перехода через десяток, то сумма цифр возраста в 2024 году будет на 1 меньше суммы цифр возраста в следующем году, то есть не может быть в целое число раз больше. Значит, переход через десяток произошёл, и возраст мистера X в 2024 году оканчивается на 9. Если мистеру X сейчас 99 лет, то в следующем году 100 – сумма цифр равна 1, то есть возраст 99 подходит. В остальных случаях возраст в 2025 году – двузначное число; обозначим его первую цифру A. Тогда сумма цифр возраста в 2024 году, $(A-1)+9=A+8$, должна делиться на A. Но тогда и 8 должно делиться на A. Значит, A – это 1, 2, 4 или 8, и помимо 99 лет возраст мистера X мог быть равен 9, 19, 39 или 79 годам.

37. Разрежьте фигуру на две равные части:



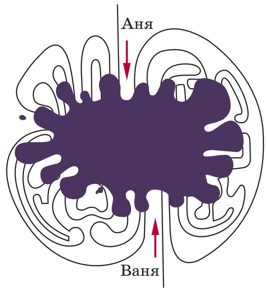
Ответ: см. рисунок.



38. *Что больше:* $1\cdot22+2\cdot21+3\cdot20+\ldots+$ $+22\cdot1$ *или* $2^2+4^2+6^2+\ldots+22^2$?

Ответ: суммы равны. Решение см. на с. 20.

39. *Перед вами карта лабиринта, в который с разных сторон вошли Аня и Ваня. Стена лабиринта – сплошная несамопересекающаяся линия, но часть карты залита чернилами. Пользуясь только этой картой, определите, могли ли Аня и Ваня встретиться в лабиринте, не выходя обратно из своих выходов, или это невозможно?*



Ответ: невозможно. Представим, что стена лабиринта на плане изображена нитью. Если вытянуть её за концы в прямую линию, Аня и Ваня окажутся по разные стороны от нити. Значит, и до этого, когда нить-стена была изогнута, Аня и Ваня были по разные стороны от неё и не смогли бы встретиться в лабиринте.

40. *Барсуки, белки, бобры и бурундуки встречали Новый год. Сначала все звери, кроме барсуков, водили хоровод, а потом хоровод водили все, кроме белок. В каждом хороводе никакие два одинаковых зверька рядом не стояли. Какое наименьшее количество бобров могло быть на празднике, если белок было на 50 больше, чем барсуков?*

Ответ: 25. Поскольку в первом хороводе белки не стояли рядом, бобров и бурундуков в сумме должно быть не меньше, чем белок – то есть по крайней мере на 50 больше, чем барсуков:

$$\text{Бо} + \text{Бу} \geqslant \text{Ба} + 50.$$

С другой стороны, во втором хороводе не стояли рядом бурундуки – значит, их было не больше, чем барсуков и бобров в сумме:

$$\text{Ба} + \text{Бо} \geqslant \text{Бу}.$$

Сложим два неравенства:

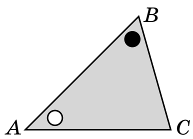
$$2\cdot\text{Бо} \geqslant 50.$$

То есть бобров не меньше 25.

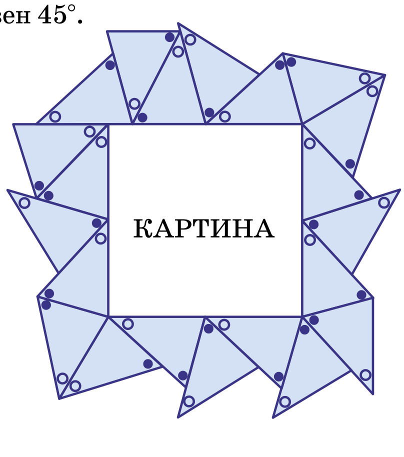
Покажем, что 25 бобров могло быть. Пусть барсуков тоже 25, бурундуков 50, а белок 75. В первом хороводе расставим белок через одну, а на пропущенные места поставим $25+50$ бобров и бурундуков. Во втором хороводе расставим через одного 50 бурундуков, а на пропущенные места поставим бобров и барсуков.

РАМА ИЗ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

(«Квантик» № 5, 2024)



Обозначим углы треугольника как на рисунке. Посмотрим на левый верхний угол картины. Из него видно, что два угла, равных углу A, в сумме дают 90°. Значит, угол A равен 45°.



Посмотрим теперь на правый верхний угол картины. Три угла, равных углу C, один угол, равный углу A, и угол квадрата составляют полный угол в 360°. Значит, $3\angle C = 360° - 90° - 45° = 225°$, то есть угол C равен $225° : 3 = 75°$. Тогда угол B равен $180° - 45° - 75° = 60°$.

ПАРОСЛОВ С ВАГОНЧИКАМИ

В слове *катафот* первая часть (др.-греч. κατα-) означает «противодействие» и не связана с катанием.

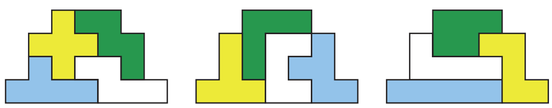
Небозём – старинное название горизонта (граница между *небом* и *землёй*). Это слово нашёл в каком-то редком источнике (или даже придумал сам) Владимир Иванович Даль. Все остальные слова в этом ряду относятся к частям тела.

Мажордом, несмотря на иностранное происхождение, подходит (франц. *majordome* образовано от лат. *major* «главный» и *domus* «дом»). А вот *домкрат* – это не домохозяин, как иногда думают, а механизм для подъёма тяжестей. *Царедворец* содержит корень *двор-*, но не слово *дворец* (ср. *живопис-ец*).

В цепочке не должно быть *каротина*, поскольку в этом слове один корень (от лат. *carota* «морковь», ср. англ. *carrot*).

ТРЁХСЛОЙНЫЙ ПИРОГ

Мне удалось найти симметричную фигуру, которую можно в три слоя выложить из пентамино:



УДИВИТЕЛЬНОЕ ЧИСЛО 2024

Ответ к задаче 3. Можно обойтись всего двумя цифрами, заменив в выражении $\binom{24}{3}$ число 24 на 4! (четыре факториал).

СПОРТ ПО-КИТАЙСКИ

Это настольный теннис, который мы часто называем «пинг-понг».

XLV ТУРНИР ГОРОДОВ. ВЕСЕННИЙ ТУР, 8 – 9 классы

Базовый вариант

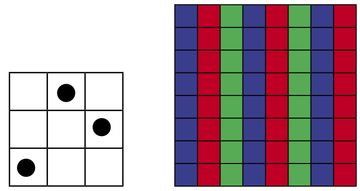
1. Ответ: могли. Вот один из примеров. Пусть масса пирога была 17 унций. Сначала разделим его на куски в 2, 7 и 8 унций, затем кусок в 7 унций на куски в 1, 2 и 4 унции. Теперь будем делить все куски, кроме «единичных», пополам, пока все не станут «единичными».

Интересно решить задачу, когда пирог разрезан на N частей: они могут оказаться равными при всех N, кроме 3, 5, 6, 9.

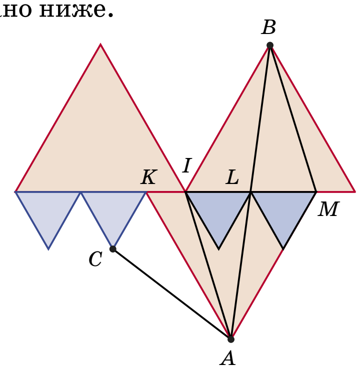
2. Ответ: 3 цвета.

Оценка. По условию клетки на левом рисунке должны быть разного цвета.

Пример. Окрасим каждый столбец в свой цвет, периодически чередуя цвета 1, 2 и 3 (см. правый рисунок).



3. Ответ: $A = 60°$, $B = 30°$, $C = 90°$. Добавим на рисунок ещё два маленьких треугольника, как показано ниже.



Так как отрезки AM и BI равны и параллельны, $AIBM$ – параллелограмм, а L тогда – его центр. При повороте на 60° против часовой стрелки вокруг точки A треугольник AML, очевидно, переходит в треугольник AKC. Значит, в треугольнике ABC сторона AB в два раза больше AC и угол CAB равен 60°, поэтому он прямоугольный с указанными углами.

4. Ответ: неверно. Пусть стоимость монеты, лежащей в центре, больше всех остальных, вместе взятых. Пусть второй пират ходит центрально симметрично первому, пока не «освободится» центральная монета. Тогда он забирает её и выигрывает.

5. Ответ: $(N - 1)^2$ яблок. Если у какого-то яблока диаметр нецелый, увеличим его до ближайшего целого числа, от этого ничего не изменится: например, все удавы одинаково «реагируют» на яблоки диаметра из промежутка (2, 3]. Так добьёмся того, что диаметры всех яблок будут целыми.

Оценка. Рассмотрим яблоки диаметра d, где $2 \leqslant d \leqslant N$. Пусть таких яблок не дадут каким-то двум удавам. Пасти этих удавов могут оказаться размером $d-1$ и d. Оба удава съедят все меньшие яблоки и оставят все бóльшие, поэтому этих удавов не различить. Значит, для каждого d от 2 до N включительно яблок диаметра d требуется хотя бы $N-1$, а всего яблок тогда нужно хотя бы $(N-1)^2$.

Пример. Дадим каждому удаву, кроме последнего, яблоки всех диаметров от 2 до N включительно. Получив такой набор, удав выдаст размер своей пасти: он равен максимальному радиусу съеденного им яблока или 1, если ни одно яблоко им не съедено. Размер пасти последнего удава определим методом исключения.

Замечание. Оказывается, тот же самый набор яблок можно раздать удавам как угодно, лишь с одним условием: не давать одинаковые яблоки одному и тому же удаву. В самом деле, если найдётся удав, съевший яблоко диаметра N, то его пасть размера N. Иначе такая пасть у удава, не получившего такого яблока. Среди остальных удавов с помощью яблок диаметра $N-1$ точно так же найдём пасть размера $N-1$ и так далее. Оставшийся в конце удав будет иметь пасть размера 1. Среди участников Турнира это заметил, например, десятиклассник Низам Гаджиев из Махачкалы.

Сложный вариант

1. Ответ: да, могло. Пусть силы мальчиков равны 1, 2, ..., 12. Разобьём их на 6 пар с равной суммарной силой 13. В одну команду возьмём любые три из этих шести пар, в другую – остальные три пары. Получится 10 разбиений на команды равной силы – число способов разбить 6 объектов на две группы по 3.

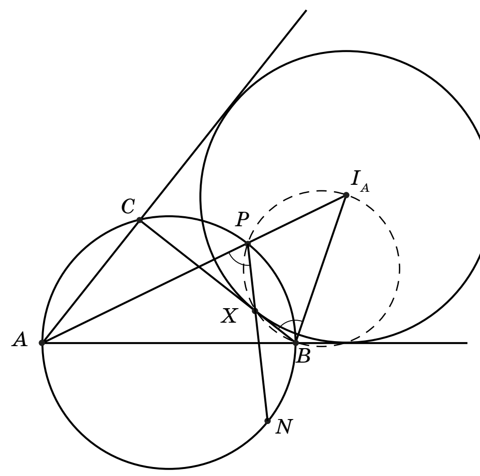
2. Обозначим девятиугольник как $A_1A_2...A_9$. Рассмотрим четырёхугольники $A_2A_4A_6A_8$ и $A_1A_4A_6A_8$. Заметим, что оба прямоугольниками они быть не могут, так как прямоугольник однозначно задаётся тремя точками. Тогда, так как сумма углов в четырёхугольнике равна $360°$, один из них будет иметь тупой угол, который и даст нам искомый треугольник.

3. Докажем, что первый игрок может делать свои ходы так, чтобы в его n-й ход количество забранных из кучки камней равнялось n^2 (при n от 1 до 10). В свой первый ход он просто берёт один камень. Пусть в свой n-й ход ему удалось сделать общее количество забранных камней равным n^2. В ответ второй игрок может взять от 1 до $2n$ камней. Так как $(n+1)^2-n^2=2n+1$, после его хода общее количество забранных камней будет больше n^2 и меньше $(n+1)^2$. Первый игрок в свой следующий ход может взять от 1 до $2n+1$ камня и точно сможет получить $(n+1)^2$ забранных камней независимо от предыдущего хода второго игрока.

Так как $100=10^2$, первый игрок своим 10-м ходом заберёт оставшиеся камни и выиграет.

4. Можно считать, что m и n – натуральные взаимно простые числа. Назовём сначала дробь $\frac{1}{2}$. Петя вычислит дробь $\frac{2m+n}{2n}$. Общий делитель числителя $2m+n$ и знаменателя $2n$ будет также общим делителем чисел $2(2m+n)-2n = 4m$ и $2n$ и, поскольку m и n взаимно просты, может равняться 1, 2 или 4. Узнав числитель, который сообщит нам Петя, мы точно будем знать, что $2m+n$ не больше этого числителя, умноженного на 4. Следующим ходом назовём дробь $\frac{1}{p}$, где p – простое число, большее учетверённого числителя, – тогда p будет больше и m, и n. Петя вычислит дробь $\frac{pm+n}{pn}$, она будет несократимой. Узнав её числитель $pm+n$, возьмём от него остаток от деления на p и найдём n. Вычтя из числителя n и поделив на p, найдём m.

6. Временно забудем о том, что точка A_1 лежит на отрезке NP. Пусть I_A – центр окружности, касающейся стороны BC и продолжений сторон BA и AC. Обозначим через X точку пересечения прямых BC и PN.



Так как I_A лежит на биссектрисе внешнего угла B, то

$$\angle CBI_A = \frac{180° - \angle B}{2} = 90° - \frac{\angle B}{2}.$$

Так как I_A лежит на биссектрисе угла A, то точки A, P, I_A лежат на одной прямой. Тогда

$$\angle APN = \frac{\overset{\frown}{AN}}{2} = \frac{\overset{\frown}{ABC}}{4} = \frac{360° - \overset{\frown}{AC}}{4} = 90° - \frac{\angle B}{2}.$$

Таким образом, $\angle CBI_A = \angle APN$, то есть четырёхугольник I_APXB вписанный.

Вернёмся к решению задачи. Точки X и A_1 совпадают тогда и только тогда, когда $\angle BXI_A = \angle BPI_A = 90°$, что, в свою очередь, эквивалентно тому, что $\angle BCA = 90°$. Проведя аналогичные рассуждения со стороны вершины A, получим, что принадлежность точек Q, B_1, M одной прямой эквивалентна тому, что угол ACB прямой, а значит, из одного утверждения следует другое.

7. Ответ: 98!.

Пример. Пусть на карточках написаны числа $\sqrt{2}$, 1, 2, ..., 98. Тогда в неудачной стопке карточка $\sqrt{2}$ должна лежать сверху, а остальные карточки можно расположить любым из 98! способов. В этом случае всякая сумма чисел на нескольких верхних карточках будет иметь вид $\sqrt{2}+n$, где n – целое, то есть будет иррациональна.

Оценка. Разобьём все стопки карточек на 98! групп, в каждой из которых одна стопка получается из другой циклической перестановкой (то есть перекладыванием нескольких верхних карточек вниз стопки). Каждая группа состоит из 99 стопок. Докажем, что каждая группа содержит хотя бы одну неудачную стопку.

Предположим, что нашлась группа без неудачных стопок. Выберем одну из стопок и расположим карточки из неё по кругу в том же порядке, в котором они лежат в стопке: a_1, a_2, ..., a_{99}. Тогда все стопки из группы будут иметь вид a_i, a_{i+1}, ..., a_{99}, a_1,..., a_{i-1} для i от 1 до 99.

Начнём идти от карточки a_1 по часовой стрелке до тех пор, пока сумма чисел $a_1 + a_2 + \ldots + a_j$ на пройденных карточках не станет рациональной. Далее начнём идти от a_{j+1} до тех пор, пока сумма чисел на пройденных карточках не станет рациональной. Такой момент настанет, потому что соответствующая стопка, начинающаяся с a_{j+1}, не является неудачной. Проделаем описанную операцию 100 раз. По принципу Дирихле найдётся карточка a_t, с которой начинали отсчитывать сумму хотя бы дважды. Оставим только шаги процесса между первым и вторым отсчитыванием от карточки a_t (включая первое, но не включая второе).

Посмотрим на сумму S пройденных чисел (каждое число считается столько раз, сколько его прошли). С одной стороны, S рационально, так как мы брали отрезки карточек с рациональной суммой. С другой стороны, мы начали с карточки a_t, а закончили карточкой a_{t-1}, то есть прошли несколько полных кругов. Из этого следует, что сумма всех пройденных чисел будет равна nS', где n – количество пройденных кругов, а S' – сумма чисел на всех карточках. Однако S' по условию иррационально, откуда nS' также иррационально. Противоречие.

Таким образом, в каждой группе есть хотя бы одна неудачная стопка. Тогда общее количество неудачных стопок не меньше чем $99! \cdot \frac{1}{99} = 98!$.

Замечание. Существуют и другие примеры. Например, можно взять карточки $1+\sqrt{2}$, $2+\sqrt{2}$, ..., $50+\sqrt{2}$, $1-\sqrt{2}$, $2-\sqrt{2}$, ..., $49-\sqrt{2}$. Назовём первые 50 карточек *положительными*, а остальные – *отрицательными*. В неудачной стопке, состоящей из этих карточек, первая карточка должна быть положительной, и для любого k среди первых k карточек положительных должно быть больше, чем отрицательных. Количество неудачных стопок в этом случае также равно 98!.

ЖУК И СТОЛБИКИ

Ответ: да. Посадим по жуку на основание каждого столбика. Пусть они ползут вверх с одинаковыми постоянными скоростями, а по палочкам переползают мгновенно. Тогда на горизонтальных палочках жуки меняются местами, и в каждый момент времени по каждому столбику ползёт ровно один жук. В частности, на каждом столбике финиширует ровно один жук.

Назовём жука, стартовавшего с первого столбика, *красным*, а финишировавшего на вершине пятого столбика – *зелёным*. Красный жук стартует левее зелёного, а финиширует правее. Значит, хотя бы на одной из палочек они меняются местами. Уберём эту палочку. После этого красный жук поползёт по маршруту зелёного, то есть закончит на пятом столбике.

ПОПРАВКА

В III туре конкурса по русскому языку («Квантик» №5, с. 24–25) в задаче 14 допущена опечатка. Текст sms-ки следует читать так: «Алеша, 1234 2134!» Приносим свои извинения. Срок отправки решений этой задачи продлён **до 1 июля.**