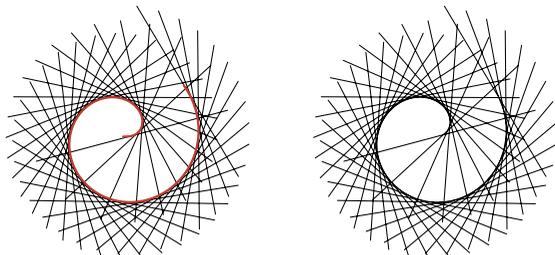


# ИЗОБРАЗИТЕЛЬНАЯ НИТЬ: ФИЗИКА

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ  
СЮРПРИЗЫ

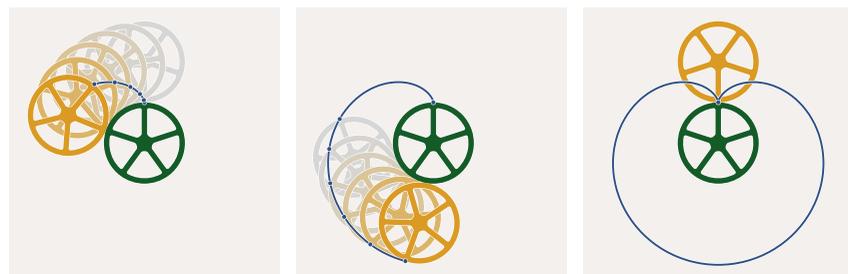
От проекта  
«Математические этюды»

В статье «Изобразительная нить: математика» («Квантик» №5 за 2024 год) рассказывалось, как с помощью техники нитяной графики можно изобразить гладкую кривую, не рисуя самой кривой, а рисуя только прямые линии – касательные к кривой.



Перегибая листочек бумаги, мы научились изображать конические сечения – эллипс, гиперболу и параболу.

Рассмотрим ещё две кривые, теперь уже относящиеся к семейству циклоид, а точнее, эпициклоид. *Кардиоида* (др.-греч. καρδιά – сердце, εἶδος – вид) – кривая, которая описывается фиксированной точкой окружности, катящейся без проскальзывания по внешней стороне неподвижной окружности такого же радиуса. Так как длины окружностей совпадают, то у кардиоиды одна негладкая, «острая» точка.

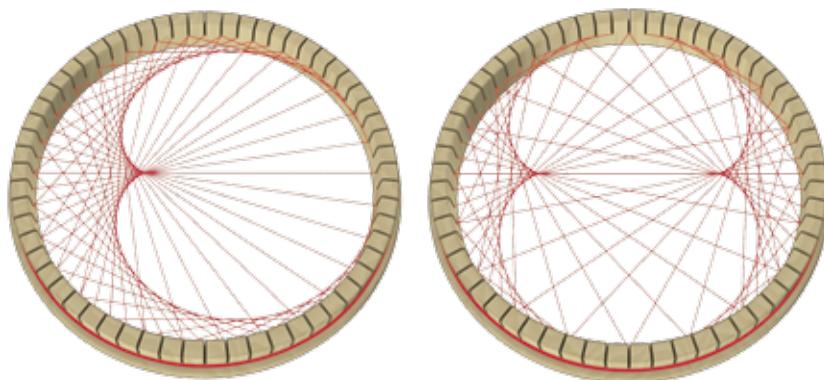


Если катящаяся окружность будет иметь радиус в два раза меньше радиуса неподвижной, то получится *нефройда* (др.-греч. νεφρός – почка, εἶδος – вид). Так как длина маленькой окружности в два раза меньше длины неподвижной окружности, то и негладких точек теперь две.





Эти кривые, за исключением нескольких точек, — гладкие, и их тоже можно увидеть как огибающие семейства касательных. Для этого расставим равномерно на окружности  $N$  точек. Чтобы «сплести» кардиоиду, для каждого  $k$  натянем ниточку от точки с номером  $k$  до точки с номером  $2k$ . (Так как мы «живём» на окружности, то эту операцию надо делать «по модулю  $N$ »: если число  $2k$  оказалось больше  $N$ , то делим его на  $N$  с остатком и рассматриваем этот остаток.) Для получения нефроиды закон соединения следует поменять на  $k \rightarrow 3k$ . В интернете по ссылке [etudes.ru/models/cardioid-nephroid/](http://etudes.ru/models/cardioid-nephroid/) можно интерактивно менять количество линий.



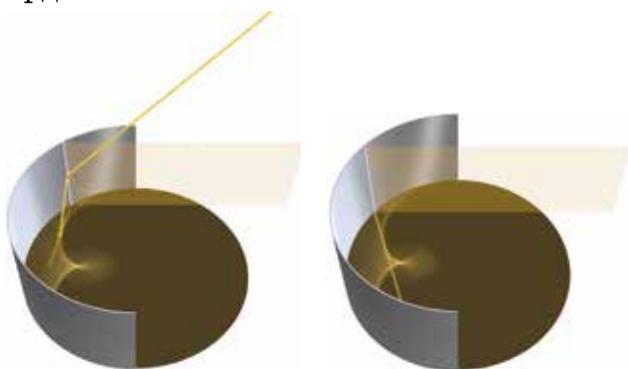
Доказательство того, что при таком натягивании ниточек получаются именно указанные кривые, опирается на теорему о двух кругах (её можно найти, например, в книге: *Васильев Н. Б., Гутенмахер В. Л.* «Прямые и кривые», § 7 «Вращения и траектории», см. также [etudes.ru/etudes/two-circles-theorem/](http://etudes.ru/etudes/two-circles-theorem/)). А сейчас визуализация огибающей с помощью касательных позволит нам понять интересное физическое явление.

После отражения света от какого-то предмета или когда свет преломляется в прозрачной посуде, иногда

можно наблюдать ярко освещённые кривые или области, называемые *каустиками* (др.-греч. *καυτικός* – жгучий). Рассмотрим случай отражения. Если параллельные лучи Солнца попадают на внутреннюю поверхность цилиндрической чашки с кофе, эмалированной цилиндрической кастрюли или освещают металлическое цилиндрическое кольцо, то можно наблюдать каустик в виде нефроида.



Луч, приходящий сверху от Солнца, отражается от внутренней поверхности цилиндра, идёт вниз и, «ударяясь» о кофе, освещает на его поверхности точку. Лучи, отражающиеся от одной образующей цилиндра, то есть лежащие в вертикальной плоскости, проходящей через образующую и луч, подсвечивают на кофе отрезок прямой. Все такие плоскости параллельны и пересекают поверхность кофе по параллельным хордам.

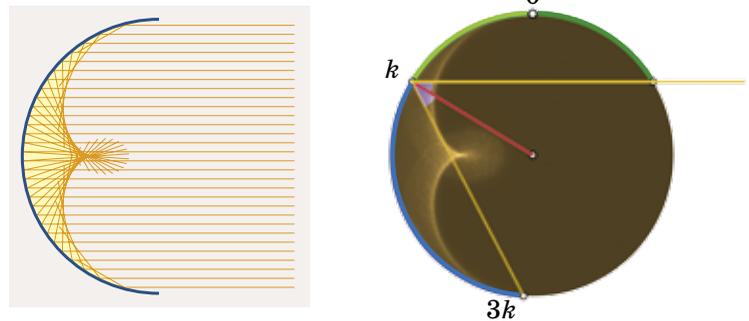


Если посмотреть сверху, мы увидим картинку, появившуюся ещё в конце XVII века в труде Христиана Гюйгенса «Трактат о свете» (рисунок вверху с. 12). Разберём подробнее отражение лучей из одной плоскости. Зелёная и салатная дуги в сумме равны синей, а значит, синяя дуга в два раза больше салато-





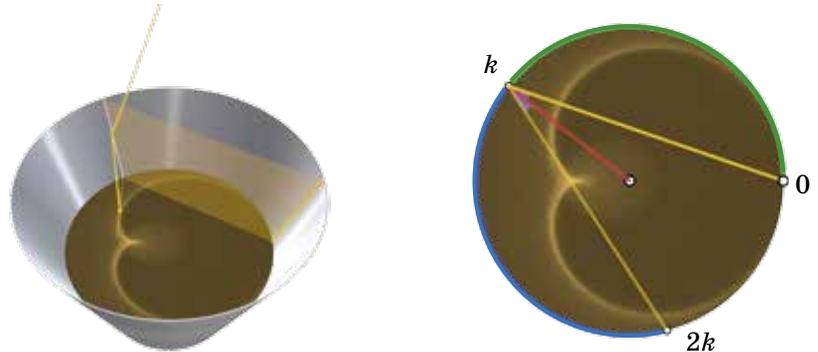
вой. Считая от неподвижного конца салатовой дуги (точка  $0$ ), получаем закон, описанный выше для касательных к нефроиде, – из точки с номером  $k$  (точка отражения) на кофе выходит подсвеченный отрезок, направленный в точку с номером  $3k$ .



Семейство подсвеченных на поверхности кофе отрезков вырисовывает яркую линию. В математических терминах, как мы уже знаем, – огибающую, а в физических терминах – *каустик*.



Увидеть каустик в виде кардиоиды позволит коническая чашка. Надо только поймать момент, когда лучи Солнца параллельны её стенке (одной из образующих конуса). В этом случае разобранные для цилиндра картинки будут иметь следующий вид.



Плоскость лучей, дающих на поверхности кофе касательную к каустике, проходит через образующую, параллельную солнечным лучам, и образующую, от которой лучи отражаются. Если считать от образующей, направленной на Солнце, то на виде сверху все лучи из этой плоскости после отражения от конуса подсвечивают точки на хорде, направленной от точки  $k$  к точке  $2k$ .

На сайте «Математические этюды» по ссылке [etudes.ru/etudes/caustic-nephroid-cardioid/](http://etudes.ru/etudes/caustic-nephroid-cardioid/) можно найти больше подробностей о каустиках и о том, как они образуются. А заинтересовавшийся читатель может провести подобные эксперименты и сам. На природе лучше – и для здоровья полезнее, и можно считать, что лучи от Солнца параллельны друг другу. Но хорошее приближение к описанным каустикам можно увидеть и в домашних условиях, используя, например, фонарик телефона. Проверить, что касательные к каустикам отвечают указанным законам, можно, распечатав хорды  $k \rightarrow 2k$  или  $k \rightarrow 3k$  на бумаге и положив вырезанный круг внутрь конуса или цилиндра.

Изобразительную нить использует сама Природа. Попробуйте и вы нарисовать свою картину!

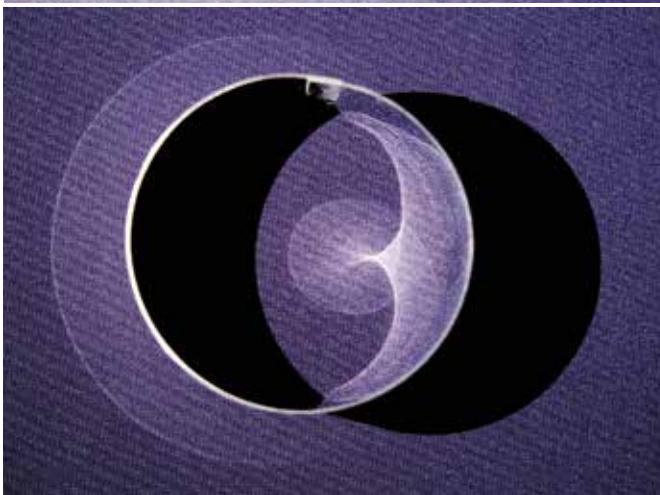
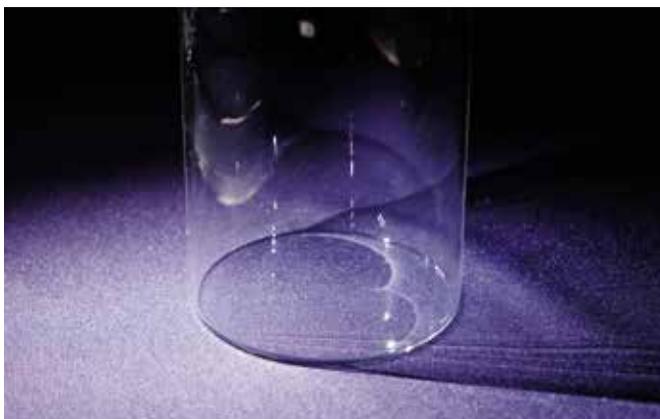


Фото: Антон Фонарёв

Художник Мария Усеинова

