



## МАГИЧЕСКИЕ КАРТОЧКИ

Как-то раз, перед занятием одного математического кружка, автору довелось услышать интересный диалог между двумя его участниками.

**Мика:** Загадай число от 0 до 15. Хочешь, я его отгадаю за 4 вопроса, на которые ты будешь отвечать «да» или «нет»?

**Женя:** Ну это легко. У тебя сейчас 16 вариантов. Первым вопросом ты поделишь их пополам – например, спросишь, больше ли моё число 7. Как бы я ни ответила, у тебя останется 8 вариантов, – если я скажу «да», то это числа от 8 до 15, если «нет» – от 0 до 7. И ты продолжишь делить пополам – после второго вопроса у тебя останется 4 варианта, после третьего 2, и после четвёртого ты будешь знать моё число.

**Мика:** Всё так. Но что, если я предложу угадать твоё число за 4 одинаковых вопроса?

**Женя:** Ты шутишь?

**Мика:** Спорим? Я четыре раза задам один и тот же вопрос, на который можно будет ответить «да» или «нет». Я не буду менять в вопросе ни одного слова.

После четырёх твоих ответов я назову твоё число.

**Женя:** Ну угадывай – я загадала!

Мика, улыбаясь, достаёт конверт с надписью «Юному волшебнику» и вынимает оттуда четыре карточки. Переворачивает первую и, улыбаясь, спрашивает: «Есть ли загаданное тобой число на этой карточке?»

Женя аж пыхтит от возмущения: «Ах ты хитрюга! Так вот что ты имел в виду!» И, успокоившись, продолжает: «Да, есть».

Мика, улыбаясь ещё шире, переворачивает вторую карточку: «Есть ли загаданное тобой число на этой карточке?»

**Женя:** Нет, нету. Показывай уже остальные карточки, вопрос я уже выучила.

Мика показывает две оставшиеся карточки.

**Женя:** На третьей есть, на четвёртой нет.

Мика смотрит на карточки, несколько секунд думает, и произносит: «Ты загадала число 10!»



**Женя:** Правильно. Интересно, а как твой фокус работает? Нет, не говори, давай я сначала сама посмотрю.

|    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 8  | 9  | 4  | 5  | 2  | 3  | 1  | 3  |
| 10 | 11 | 6  | 7  | 6  | 7  | 5  | 7  |
| 12 | 13 | 12 | 13 | 10 | 11 | 9  | 11 |
| 14 | 15 | 14 | 15 | 14 | 15 | 13 | 15 |

**Женя:** Так, на первой карточке есть все восемь чисел от 8 до 15. То есть это тот же самый вопрос, делящий варианты пополам – на числа от 0 до 7 и на числа от 8 до 15. Давай на всякий случай выпишем все числа от 0 до 15 и выделим из них те, что на первой карточке:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

**Женя:** А вот вторая... Хмм... Давай их выделим на том же рисунке?

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

Ага! Я сначала думала, что ты выберешь вторую карточку в зависимости от моего ответа. То есть если бы на первый вопрос я сказала «да», то ты показал бы карточку, на которой написаны четыре числа от 12 до 15. А если бы на первый вопрос я сказала «нет» – то карточку, на которой записаны четыре

числа от 4 до 7. А ты вместо этого показал одну карточку, на которой написано и то, и другое!

**Мика:** И третья карточка так же получается?

**Женя:** Давай посмотрим: после каждого варианта ответа на первые две карточки остаётся четыре числа.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

Ага, опять мы каждый вариант делим пополам – и объединяем всё это на одной карточке. Ну и четвёртая такая же!

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11  
12 13 14 15

**Женя:** Вот, становится понятно, как твои карточки работают. И когда ты отгадывал – ты следил за тем, что ты знаешь о моём числе, правильно?

**Мика** (доставая из конверта ещё один листок): Не-а. У меня была инструкция!

#### Инструкция юному волшебнику

*Отложи в одну стопку те карточки, на которые загадывающий сказал «Да». Сложи первые числа на этих карточках, они выделены красным*



цветом. Сумма этих чисел и будет загаданным числом.

**Мика:** Ты ответила «Да» про первую и третью карточки. Так что я сложил  $8 + 2$  и получил 10.

**Женя** (возмущённо): Так нечестно! Почему это работает?

**Мика:** Но ведь работает же!

**Женя:** Но надо же понять, почему! Давай посмотрим, а что будет с другими числами? Если я загадаю 13?

**Мика:** Оно есть на первой, второй и четвёртой карточке, так что я сложу  $8 + 4 + 1$  и получу как раз 13. Всё правильно!

**Женя:** То есть когда твоя инструкция работает, загаданное число оказывается суммой каких-то из чисел 1, 2, 4 и 8. Что-то это мне напоминает... Ну конечно! Это же степени двойки, а мы такое разложение видели, когда нам про двоичную систему рассказывали. Помнишь?

**Мика:** Точно. Это когда нам рассказывали, что в десятичной записи число, скажем, 243 – это две сотни, четыре десятка и ещё три единицы – а можно брать вместо степеней десятки

степени двойки, и тогда каждую нужно или брать, или не брать. И поэтому двоичная запись состоит из ноликов и единичек. Только я забыл, а почему любое число так можно было разбить?

**Женя:** Там было два рассуждения. Одно – когда мы сначала вычитали самую большую степень двойки, которая ещё не превосходит нашего числа, потом самую большую, которая не больше того, что осталось, и так далее. Скажем, самая большая степень двойки, меньшая 13, это 8, и если её вычесть, останется 5. Теперь можно вычесть 4, и останется 1 – так что

$$13 = 8 + 4 + 1.$$

А два раза степени повторяются не могли, потому что иначе мы бы могли сразу вычесть их сумму, которая следующая степень двойки.

**Мика:** Точно, но там было что-то ещё?

**Женя:** Там было второе рассуждение, когда мы представляли себя туземцами «двоичного племени» и сначала считали число – например, 13 – единицами:

$$13 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1,$$



потом разбивали всё, что получится, на пары – получалось

$$13 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1,$$

потом двойки опять на пары:

$$13 = 4 + 4 + 4 + 1,$$

дальше четвёрки на пары:

$$13 = 8 + 4 + 1,$$

и когда разбивать становилось нечего – мы и получали разбиение в сумму степеней двойки. А потом мы её записывали – ставя 1 на место тех степеней, которые мы берём, и 0 – которых не берём. И дописывали 2 вниз, чтобы показать, что запись двоичная. Получалось

$$13 = 1101_2.$$

**Мика:** Постой, ведь 1101 – это же в точности твои ответы про карточки, 13 есть на первой и второй карточке, его нет на третьей, и оно есть на четвёртой!

**Женя:** Да, точно. А тогда я понимаю, как были сделаны твои карточки! Чтобы они работали правильно, для каждого числа от 0 до 15 ответы загадывающего должны показать его двоичную запись. Но тогда на каждой карточке собраны те числа, у которых на этом месте стоит «1» в дво-

ичной записи! То есть как раз те числа, в разложении которых появляется соответствующая степень двойки.

**Мика:** А то, что ты говорила до того, как увидела инструкцию, про деление пополам?

**Женя:** Наверное, это просто другой способ придумать те же самые карточки. Кажется, при этом получается построение двоичной записи, когда проверяешь, можно ли вычестить степень двойки, и если да, то вычитаешь. Сначала пытаешься вычестить 8, потом 4, потом 2, потом 1. Слушай, а в твоём конверте ещё что-нибудь есть?

**Мика:** А как же! Смотри, вот пять карточек, чтобы угадывать числа от 0 до 31 – можно говорить «давай я угадаю твой день рождения»!

**Женя:** Это понятно – такая же двоичная запись, только тут числа от 00000<sub>2</sub> до

$$11111_2 = 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 31.$$

А ещё что-нибудь?

**Мика:** Да, конечно!

Но тут начался кружок, и продолжили они уже в следующий раз...