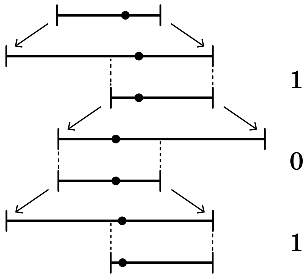
Никита Солодовников

УДВОЕНИЕ ОТРЕЗКА И СУДЬБА ТОЧКИ

Квантик и Ноутик отметили на отрезке точку и играют в такую игру. Квантик равномерно растягивает отрезок в 2 раза, а Ноутик режет получившийся отрезок посередине. Ту половину, в которой нет отмеченной точки, выбрасывают, а с той, в которую попала точка, повторяют всю операцию сначала. И так шаг за шагом. Если точка попала ровно посередине, её можно отнести к любой из половин.



Чтобы помнить, что происходило с точкой, Квантик каждый раз записывает, в какую половину она попала: если в левую, он пишет 0, а если в правую – пишет 1. Так у него получается записанной *судьба* точки: по последовательности нулей и единиц сразу видно, в какой половине оказывалась точка на каждом шаге.

Задача 1. На отрезке [0; 1] выбрана точка 0,474. Выпишите первые три знака её судьбы.

В этой статье мы ответим на три вопроса:

1. Может ли точка иметь две разные судьбы?
2. Могут ли разные точки иметь одинаковую судьбу?
3. У каких точек периодическая судьба (с какого-то момента повторяется, например: 110010101010...)?

У каких точек две судьбы

Если точку можно описать двумя разными судьбами, то можно найти номер первого шага, на котором судьбы различаются. Например, судьбы

01011100...
01011101...

впервые различаются на восьмом шаге. После седьмого шага отрезок в очередной раз разрезали надвое, и точку можно было отнести как к левой половине, так и к правой. Значит, точка оказалась ровно посередине отрезка! При этом, если её отнести к левой половине, то она будет его правым концом и будет оставаться им при всех дальнейших удвоениях. А если отнести к правой, то она навсегда впредь будет левым концом. Это однозначно определяет её дальнейшую судьбу:

01011101000… (дальше идут одни нули)
01011100111… (дальше идут одни единицы)

У разных точек разные судьбы

На каждом шаге, пока различные точки не попадают в разные половины, расстояние между точками удваивается. Поэтому судьбы неизбежно разойдутся: в какой-то момент расстояние станет больше длины исходного отрезка и точки попадут в разные половины.

Периодические судьбы

Пример. Точка 3/5 при растяжении вдвое перейдёт в 6/5 и попадёт в правую половину, на отрезок [1; 2]. При разрезании будет отброшена левая половина, 6/5 перейдёт в $6/5-1=1/5$. Продолжим:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 3/5 & \to & 1/5 & \to & 2/5 & \to & 4/5 & \to & 3/5 & \to & \ldots \\ & 1 & & 0 & & 0 & & 1 & & \ldots & \end{array}$$

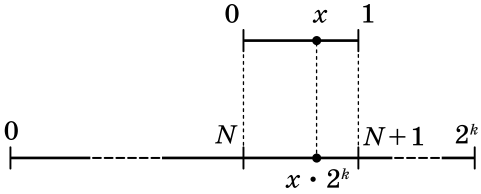
После четырёх шагов дробь перешла в себя – и далее последовательность (1001) в судьбе начнёт повторяться. Повторяющуюся часть последовательности (наименьшую) называют её *периодом*, а количество знаков в периоде – его *длиной*. У точки 3/5 судьба 100110011001… с периодом (1001) длины 4.

Умножение на 2 и вычитание 1 не меняет знаменатель дроби (условимся не сокращать дроби!). Дробей с любым конкретным знаменателем на отрезке [0; 1] конечное число, поэтому при удвоении (и вычитании 1) любая дробь рано или поздно «зациклится». Значит, *судьба любой дроби будет периодической*.

Задача 2. Квантик берёт отрезок [0; 1] и сначала выкидывает правую половину отрезка, потом левую половину оставшегося, потом снова правую, снова левую… Какая точка не будет выкинута ни на каком шаге?

Теперь покажем, что если у точки x периодическая судьба, то x – обыкновенная дробь, то есть отношение целого числа к натуральному. Пусть k – длина периода этой судьбы. Вообразим, что Квантик исправно удваивает отрезок, а Ноутик забывает его разреза́ть. Квантик растянет отрезок до длины 2^k. Если теперь Ноутик спохватится, он разрежет получившийся отрезок $[0; 2^k]$ на единичные отрезки [0; 1], [1; 2], [2; 3], … Точка x после k удвоений будет иметь координату $x \cdot 2^k$ – и окажется на одном из единичных отрезков. Пусть это отрезок $[N; N+1]$. Периодичность

судьбы означает, что точка приняла своё исходное положение, то есть на отрезке $[N;\ N+1]$ она тоже имеет координату x.



Получается, что $x \cdot 2^k = N + x$, а значит, $x = N\ /\ (2^k - 1)$. Итак, точка обязательно будет дробью.

Задача 3. На отрезке AB отметили точку X так, что $AX : AB = 1 : 10$. После этого отрезок AB разделили на 2^{10} равных частей. В каком отношении точка X делит ту часть, на которую попадает?

Послесловие

Попробуем изменить игру в «удвоение». Будем растягивать отрезок [0; 1] не в 2, а в 10 раз и резать его на 10 частей [0; 1], [1; 2], ..., [9; 10]. Кодировать их будем цифрами 0, 1, 2, ..., 9. После этого тот из единичных отрезков, на который попала выбранная точка, возьмём как новый отрезок [0; 1], а остальные 9 отрезков выкинем. Повторяя такое «удесятерение» раз за разом, мы получим судьбу точки, записанную цифрами от 0 до 9.

Эта «судьба» совпадает с десятичной записью координаты точки! Действительно, при построении десятичной записи координат отрезок не растягивают в 10 раз, а просто выбирают сначала одну из его десятых долей [0; 0,1], [0,1; 0,2], ..., [0,8; 0,9], [0,9; 1]. Затем выбирают одну из сотых – для этого делят выбранную десятую долю на более мелкие 10 частей. Затем, деля выбранную сотую долю на 10 частей, уточняют положение точки до тысячных долей.

Всё, что мы доказали прежде для судьбы точки при удвоении, верно и для судьбы при удесятерении, а поэтому и для десятичной координаты точки. Так, 0,9999... = 1,000..., потому что у точки, попадающей на границу отрезка, две судьбы. Дроби – и только они! – имеют периодическую запись и в десятичной, и вообще в любой системе записи.

Задача 4. Найдите судьбу 0,474 при удесятерении.

Задача 5. Найдите, в какие дроби переходит 1/11 при удесятерении. Выпишите её судьбу в десятичной записи. Сравните с вычислением 1/11 на калькуляторе.

Художник Анна Рацкевич