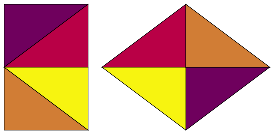
НАШ КОНКУРС, X тур

(«Квантик» № 6, 2024)

46. *У Пети есть картонный прямоугольник. Он хочет разрезать его на части и сложить из них ромб. Помогите ему это сделать.*

Ответ: разрежем Петин прямоугольник на два одинаковых прямоугольника и каждый из них разрежем по диагонали на два треугольника. Из получившихся 4 равных прямоугольных треугольников можно сложить ромб, как на рисунке.



47. *Какое из двух чисел,* $100!$ *или* $100!+99!+$ $+98!$*, оканчивается на большее количество нулей? Напомним, что* $n!$ *– это произведение натуральных чисел от* 1 *до* n.

Ответ: $100!+99!+98!$. Заметим, что $100!+$ $+99!+98!=(100\cdot 99+99+1)\cdot 98!=(100\cdot 99+$ $+100)\cdot 98!=100\cdot 100\cdot 98!$, то есть на конце этого числа будет на 4 нуля больше, чем на конце числа $98!$. В то же время, $100!=100\cdot 99\cdot 98!$, то есть на конце числа $100!$ будет лишь на два нуля больше, чем на конце числа $98!$.

Значит, $100!+99!+98!$ оканчивается на большее число нулей, чем $100!$.

48. *На столе лежит стопка блинов. Между соседними блинами либо сметана, либо какая-то одна сладкая начинка – мёд или варенье. Сверху и снизу стопки пусто. У каждого блина ровно одна сторона намазана сметаной. У трети блинов одна сторона намазана вареньем. У* 10 *блинов одна сторона намазана мёдом. Сколько блинов в стопке?*

Ответ: 18. Пусть блинов b. Тогда всего сторон у блинов $2b$, причём из них b намазаны сметаной, $\frac{1}{3}b$ – вареньем, 10 – мёдом, и 2 стороны (верх и низ стопки) – пустые. То есть $2b=b+\frac{1}{3}b+$ $+10+2$, откуда $\frac{2}{3}b=12$ и $b=18$.

49. *а) Найдите наименьшее целое положительное число, каждая цифра которого равна количеству отличных от неё цифр этого числа. б) Найдите наибольшее такое число.*

Ответ: а) 112; б) 99999999888888888.

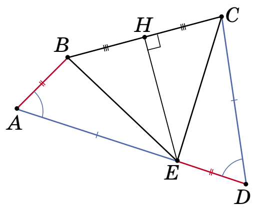
Назовём число, каждая цифра которого равна количеству отличных от неё цифр этого числа, *подходящим*. В подходящем числе обязательно найдутся две разные цифры: иначе все цифры одинаковы и равны 0 (так как других цифр нет). Быть двузначным подходящее число также не может: тогда его цифры различны, но каждая должна равняться 1 – противоречие.

Попробуем найти наименьшее подходящее число среди трёхзначных, начинающихся на 1. В таком числе ровно одна цифра не 1, значит, оно состоит из двух цифр 1 и одной цифры 2. Наименьшее такое число – 112.

Найдём теперь наибольшее подходящее число. Если в нём есть различные цифры m и n, то всего в этом числе m цифр, отличных от m, а самих цифр m не больше, чем n – в сумме не более $n+m$ цифр. Значит, в самом большом подходящем числе не более $9+8=17$ цифр. Если оно начинается с 9, то в нём 9 не-девяток, а значит, самих девяток не более $17-9=8$, то есть самое большое подходящее число состоит из восьми цифр 9 и девяти цифр 8 – это 99999999888888888.

50. *В выпуклом четырёхугольнике* $ABCD$ *углы* A *и* D *равны,* $AD=AB+DC$*. Серединный перпендикуляр к отрезку* BC *пересекает отрезок* AD*. Докажите, что он делит* $ABCD$ *на два четырёхугольника одинакового периметра.*

Отметим на AD такую точку E, что $AE=CD$ и $AB=DE$, и проведём отрезки BE и CE.



Тогда треугольники BAE и EDC равны по двум сторонам и углу между ними. Значит, $BE=CE$, и в равнобедренном треугольнике BCE высота EH, опущенная на сторону BC, совпадёт с серединным перпендикуляром к BC, причём $BH=CH$. То есть нам нужно показать, что четырёхугольники $ABHE$ и $DCHE$ имеют одинаковый периметр. Но это действительно так: у этих четырёхугольников соответственные стороны одинаковы.

ЗОДИАКАЛЬНЫЕ СОЗВЕЗДИЯ

(«Квантик» № 7, 2024)

Солнце и звёзды движутся по небу из-за вращения Земли вокруг своей оси. Звёзды движутся как единое целое, то есть не меняя взаимного расположения. Если бы мы могли днём видеть звёзды, то заметили бы, что Солнце движется по небу медленнее, чем звёзды, и потому переходит из одного созвездия в другое. Разберёмся, почему так происходит. Если для наблюдателя на Земле Солнце находится в каком-то созвездии, то в пространстве Земля, Солнце и это созвездие расположены на одной прямой, причём

Солнце – между Землёй и созвездием. Но Земля движется вокруг Солнца, поэтому эта прямая вращается, пересекая разные созвездия. Эта прямая всегда лежит в плоскости орбиты Земли, поэтому Солнце может оказаться только в тех созвездиях, которые лежат в этой плоскости, они и называются зодиакальными. За один год суммарное отставание Солнца от звёзд составляет как раз один полный круг на небе. Например, Солнце в августе проходит через созвездие Льва, а в феврале – через созвездие Рыб.

Какие созвездия лучше видны? Те, что выше поднимаются над горизонтом. Ведь у горизонта созвездие могут заслонять дома или деревья. К тому же созвездие имеет определённый размер, поэтому ему нужно подняться хотя бы настолько, чтобы его было видно целиком. Созвездия каждый день проделывают на небе один и тот же путь, описывая круг вокруг Полярной звезды, которая почти не движется (если часть этого пути проходит ниже линии горизонта, то в это время созвездия не видно). Но как понять, какое из созвездий зодиака поднимается выше, не заглядывая в звёздные карты и не производя масштабных наблюдений?

Путь зодиакального созвездия можно «вычислить» по пути Солнца. Мы уже упоминали, что Солнце бóльшую часть августа находится в созвездии Льва. Поэтому созвездие Льва движется по небу так же, как Солнце в августе. А когда Солнце поднимается выше всего? В день летнего солнцестояния: это 20 или 21 июня. Кто заглядывал в гороскоп, тот знает, что эти дни соответствуют Близнецам и Раку. Однако на самом деле Солнце находится в каждом созвездии примерно на месяц позже, чем «по гороскопу». Поэтому выше всего поднимаются созвездия Тельца и Близнецов. Соседние с ними созвездия Рака и Овна видны плохо, так как их звёзды тусклые. Хорошо видно созвездие Льва. А хуже всего видны созвездия Скорпиона и Стрельца, так как поднимаются ниже всего.

Созвездия Тельца и Близнецов видны не летом, когда в них Солнце, а зимой, когда они поднимаются над горизонтом ночью (см. задачу «Созвездие Близнецов», «Квантик» №12 за 2022 год). Подумайте, в какие месяцы можно наблюдать самое высокое полнолуние.

ВАС ПЛОХО СЛЫШНО

Пусть отгадывающий отвечает честно на все вопросы; сложим коды карточек, на которые он ответил «да». Чтобы карточки работали правильно, нужно, чтобы все цифры такой суммы были чётными – для любого загаданного числа.

Поэтому для каждого числа от 1 до 15 нужно сделать следующее:

– посчитать сумму кодов тех из «исходных» карточек (с кодами 011, 101, 110, 111), на которых оно есть;

– посмотреть, какие из разрядов получившейся суммы нечётны;

– записать его на соответствующие новые карточки: если нечётна цифра сотен, то на карточку с кодом 100, если цифра десятков, то на 010, если единиц, то на 001.

Готово – теперь при честных ответах все цифры суммы кодов из стопки «да» чётны!

УДВОЕНИЕ ОТРЕЗКА И СУДЬБА ТОЧКИ

Решение задачи. После первого удвоения точка окажется на отрезке [0; 2], а её координата будет $2 \times 0{,}474 = 0{,}948$. Точка попадёт в левую половину отрезка [0; 2], так как $0{,}948 < 1$. Поэтому первый раз Квантик запишет в судьбу 0. После разрезания точка лежит на отрезке [0; 1], её координата 0,948. Второй шаг: $1 < 2 \times 0{,}948 = 1{,}896$ – точка попала на отрезок [1; 2], то есть в правую половину отрезка [0; 2], а значит в судьбу будет записано 1. А после разрезания и выкидывания левой части [0; 1] координату можно для удобства уменьшить на длину выкинутой части – на единицу: $1{,}896 \to 0{,}896$ (и снова считать наш отрезок отрезком [0; 1]). Наконец, третий шаг: $0{,}896 \to 1{,}792$. Точка снова в правой половине, в судьбу записываем 1. Итак, первые три знака: 011.

2. Ответ: 1/3. Пусть каждый раз, когда Квантик выкидывает половину, он растягивает оставшуюся половину в два раза. Это не повлияет на то, какие точки будут выкинуты. А какие точки не будут выкинуты ни на каком шаге? Те, которые, на первом шаге оказались в левой половине, потом в правой и так далее. Это в точности такие точки, которые имеют судьбу 010101... Проверьте, что такая судьба у точки 1/3.

3. Ответ: 4 : 6. Можно считать, что отрезок AB – это отрезок [0; 1024], а точка X – это точка 102,4. Тогда отрезок AB разделён на единичные отрезки, а точка X попала на отрезок [102; 103], откуда находится искомое отношение. Тот же ответ можно получить с помощью игры в удвоение. Действительно, отрезок AB поделён на 2^{10} равных частей, значит, после первого шага игры получится отрезок, разделённый на 2^9 равных частей, после второго – на 2^8 и так далее, после десятого шага та часть, на которую попала точка X, растянется на весь отрезок. Теперь можно найти, куда попадёт точка X:

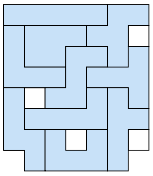
$1/10 \to 2/10 \to 4/10 \to 8/10 \to 6/10 \to 2/10 \to 4/10 \to$
$\to 8/10 \to 6/10 \to 2/10 \to 4/10$.

4. Ответ: 474000... (дальше только нули).

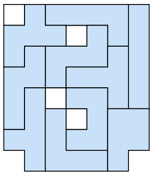
5. Точка $1/11$ при первом удесятерении переходит в точку $10/11$, потом снова в $1/11$, так как $100/11 = 1/11 + 9$. Дальше всё будет повторяться. Точка $1/11$ лежит на отрезке $[0; 0{,}1]$, а точка $10/11$ – на отрезке $[0{,}9; 1]$. Значит, судьба точки будет 090909... Это цифры числа $1/11$ после десятичной запятой: $1/11 = 0{,}090909...$

КАЛЕНДАРИК

31 декабря
вторник
работа



1 января
среда
отдых



ПЕРЕГИБЫ С ПЕРЕПЛЁТОМ

Оказывается, отметить середину стороны CD можно *при любом* соотношении ширины и высоты листа. Для этого можно применить знаменитую теорему о том, что в любом треугольнике *медианы пересекаются в одной точке*. А как именно – сейчас увидим.

Здесь можно сразу «стартовать» с картинки, изображённой на рисунке 3б – когда с помощью перегибов на листе уже имеется прямоугольник $FECD$ с диагоналями, пересекающимися в точке P. Далее будем рисовать покрупнее, причём только правую часть прямоугольника $ABCD$, содержащую этот самый «вложенный» прямоугольник $FECD$ (рис. 4а). Перегнём лист так, чтобы точка C совпала с точкой E. После обратного «распрямления» появится вертикальный отрезок GH, который делит прямоугольник $FECD$ на две равные части и при этом проходит через точку P (рис. 4б). Перегнём теперь лист так, чтобы линия сгиба проходила через точки C и H (рис. 4в), и рассмотрим повнимательней треугольник CDF. В нём CH – медиана, и DP – тоже медиана. Значит, если через вершину F и точку O пересечения отрезков CH и DP провести прямую линию, то она также будет медианой треугольника CDF и обязана будет пройти через середину стороны CD. А ведь это нам и надо! Итак, последний штрих: перегибаем лист так, чтобы линия сгиба прошла через точки F и O. Она как раз пройдёт через середину M отрезка CD (рис. 4г), что и требовалось.

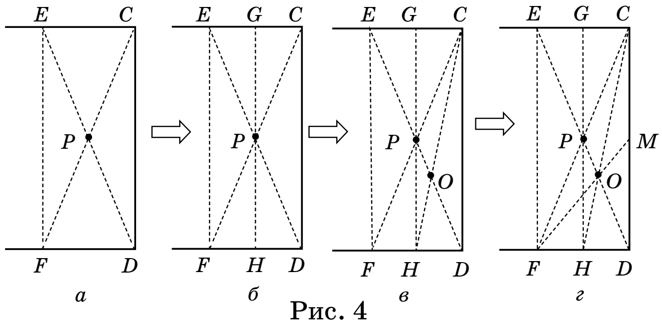


Рис. 4

Примечание. Перегиб по отрезку CF можно было бы и не делать, так как точка P образуется при пересечении двух других отрезков.

ИНВЕРСИЯ ТЕНИ

Если бы тени не было, и тёмная полоса простиралась до самого поребрика, картина была бы яснее: у края дороги может быть тёмная каёмка, если там скопилась и не до конца высохла влага. Как на влажную каёмку может повлиять тень? Участок вне тени прогревается солнцем. Можно было бы ожидать, что он тогда просохнет и будет светлее тени, – но у нас всё наоборот: вне тени асфальт не просох, тепла солнца не хватило. Но его хватило на что-то, после чего солнечная часть стала тёмной, а холодная часть в тени осталась светлой. Если тёплая, солнечная часть тёмная и влажная, то холодная часть, видимо, замёрзшая: иней оставляет асфальт светлым, а на свету тает и затемняет его. Этот эффект можно воспроизвести, нагрев участок в тени раньше солнца, как показано на фото справа.

СВЕТОФОРЫ

На Лёлиной фотографии левый светофор показывает либо 35, либо 39, значит, разница равна либо 6, либо 2 секундам. На Полиной фотографии на левом светофоре либо 26, либо 28, то есть разность в 6 секунд не подходит, и показания светофоров отличаются на 2 секунды.

РЫБА И ПТИЦА

Здесь главное – сообразить, что слева стоит не буква «З», а цифра «ТРИ», так что получаем: с «ТРИ» «Ж», то есть СТРИЖ.